ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

487

SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(Physique relativiste)

PAR

Augustin SESMAT

Professeur d'Histoire et de Critique des Sciences
à l'Institut Catholique de Paris

II

PRINCIPES DE LA THÉORIE RESTREINTE

PARIS

HERMANN & C^ie^, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1937

B. S. Mohanaky

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
487

SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(Physique relativiste)

PAR

Augustin SESMAT

Professeur d'Histoire et de Critique des Sciences
à l'Institut Catholique de Paris

II

PRINCIPES
DE LA THÉORIE RESTREINTE

PARIS
HERMANN & C^ie^, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6
—
1937

DU MÊME AUTEUR :

(LIBRAIRIE HERMANN)

I. — SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(*Physique classique*)

I. — **Le problème des mouvements réels.**
II. — **L'Ancienne astronomie, d'Eudoxe à Descartes.**
III. — **Mécanique newtonienne et gravitation.**
IV. — **Le système absolu de la mécanique.**
V. — **L'optique des corps au repos.**
VI. — **L'optique des corps en mouvement.**
VII. — **L'esprit de la science classique.**

II. — SYSTÈMES DE RÉFÉRENCE ET MOUVEMENTS

(*Physique relativiste*)

I. — **Genèse des théories de la relativité.**
II. — **Principes de la théorie restreinte.**
III. — **Les systèmes privilégiés de la théorie restreinte.**
IV. — **Principes de la théorie générale.**
V. — **Théorie relativiste de la gravitation.**
VI. — **Les systèmes privilégiés de la théorie générale.**
VII. — **Essai critique sur la doctrine relativiste.**

CHAPITRE PREMIER

LA RELATIVITÉ RESTREINTE

Article II

NÉGATION DU PRIVILÈGE DE L'ÉTHER

13. Le principe restreint de Relativité : équivalence de tous les systèmes d'inertie pour toutes les lois physiques.

Le premier Mémoire d'Einstein comporte une introduction de moins de deux pages où sont formulées les idées fondamentales de la théorie restreinte de la relativité : principe du mouvement relatif, principe de relativité, postulat de la constance de la vitesse de la lumière, abandon de la notion d'éther.

Le principe du mouvement relatif est d'abord insinué, en ce sens qu'Einstein, à propos des actions é. m. qui s'exercent entre un aimant et un conducteur en mouvement l'un par rapport à l'autre, dit que l'asymétrie des effets attribués par la théorie classique aux mouvements respectifs des deux corps — production d'un champ électrique, avec énergie localisée dans le champ, quand c'est l'aimant qui se meut ; production directe de force électromotrice quand c'est le conducteur — ne semble pas exister dans la nature des choses, d'autant que les courants produits sont les mêmes dans les deux cas (1). Mais aussitôt après, le même

(1) A. Einstein : *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement.* Traduction Solovine. 1 plaquette. Paris, Gauthier-Villars, 1925. Introduction, p. 1-3.

principe est explicitement formulé, avec son corollaire le principe de relativité : l'échec des expériences destinées à déceler le mouvement de la Terre par rapport à l'éther, dit Einstein, suggère que ce n'est pas seulement en mécanique « qu'aucune propriété des phénomènes ne correspond à la notion de mouvement absolu », mais aussi en électrodynamique ; et que « dans tous les systèmes de coordonnées pour lesquels les équations de la mécanique demeurent valables, les lois électrodynamiques et optiques gardent aussi leur valeur ». Nous voulons, continue-t-il, élever cette conjecture au rang d'hypothèse, et nous l'appellerons le *principe de Relativité* (1).

Pour Einstein donc, les mouvements absolus n'interviennent jamais dans la détermination des phénomènes physiques, et ce serait déjà en mécanique un fait acquis. (Rappelons cependant qu'une réserve aurait été ici nécessaire au sujet des effets dynamiques des accélérations. Einstein ne paraît pas songer à la faire, comme si dès 1905 sa croyance au principe général du mouvement relatif avait été absolue). De plus, et en conséquence, tous les systèmes d'inertie sont équivalents pour toutes les lois physiques : c'est l'énoncé du principe restreint de relativité sur lequel va s'édifier toute la théorie dite de la relativité restreinte.

14. Double postulat de l'indépendance de la vitesse de la lumière par rapport au mouvement de la source, et de son invariance dans tous les systèmes d'inertie. — Einstein ajoute au principe de relativité ce postulat « que la lumière se propage *toujours*, dans le vide, avec la même vitesse, *c*, quel que soit d'ailleurs le mouvement de la source lumineuse (2) ».

Que signifie ici le mot *toujours* ? Einstein veut dire, comme le montre par ailleurs l'ensemble de la théorie, que la vitesse de la lumière est indépendante de la direction dans tous les systèmes d'inertie, comme pour les classiques elle était indépendante de la direction dans le système absolu ; et que de plus elle a dans le vide et relativement à tous ces systèmes la valeur *c* que les classiques lui attribuaient dans le seul système absolu.

Or, poursuit Einstein, l'indépendance de la vitesse de la lu-

(1) *Ibidem*, p. 2.
(2) *Ibidem*, p. 3.

mière par rapport à celle de la source paraît contredire le principe de relativité ; mais cette apparente contradiction peut être levée, car elle se déduit de notions invétérées, mais qui ne s'imposent pas. Voyons d'abord où est la contradiction.

15. Incompatibilité d'après la cinématique classique des deux postulats relatifs à la vitesse de la lumière. — La vitesse de la lumière, vient de dire Einstein, tout en étant toujours la même dans tous les systèmes d'inertie, ne dépend pas de la vitesse de la source émettrice : c'est ici précisément ce qui fait difficulté. Supposons en effet que la lumière émise participe à la vitesse de la source comme l'obus à celle du canon : alors le principe de relativité serait satisfait comme il arrive en mécanique. Si par exemple un canon lié à un système d'inertie de vitesse u lance, dans la direction et le sens de sa propre vitesse, un obus avec la vitesse absolue v, l'obus a une vitesse absolue $u + v$; mais par rapport à une cible liée au système mobile et qui fuit devant lui l'obus a la vitesse $u + v - u = v$, la même qu'il aurait dans le système absolu. Cette conservation de la vitesse s'établirait aisément dans le cas général. Donc la loi spéciale de la vitesse relative des projectiles lancés dans les mêmes conditions est bien la même dans les systèmes d'inertie mobiles que dans le système absolu, comme le veut le principe de relativité ; et il en serait de même pour la vitesse de la lumière si la lumière émise participait à la vitesse de la source émettrice. Mais si la vitesse de la lumière est indépendante de celle de la source, on ne voit plus comment elle peut être la même dans tous les systèmes d'inertie, ni comment le principe de relativité peut être satisfait.

De fait si un récepteur est au repos absolu, il reçoit bien à la vitesse c la lumière émise par une source quelconque ; mais dès qu'un récepteur se meut par rapport au système absolu, il se rapproche ou s'éloigne de la lumière en marche vers lui, et par exemple la reçoit à la vitesse $c + v$ quand il va radialement au devant d'elle, à la vitesse $c - v$ quand il fuit radialement devant elle, v étant sa propre vitesse absolue. Donc par rapport à un système lié au récepteur la vitesse de la lumière ne sera pas la même dans toutes les directions, et n'obéira pas à la même loi simple que dans le système absolu.

Oui, répond Einstein ; tout cela serait exact si les lois de la cinématique classique étaient vraies ; mais elles sont discutables, du fait que la notion classique du temps physique est elle-même sujette à caution ; et il y aurait moyen de tout concilier si l'on adoptait une nouvelle définition du temps.

Avant d'en venir à la critique de l'idée de temps, signalons que, trois ans après la publication du Mémoire d'Einstein, il se rencontra un physicien pour faire dépendre la vitesse de la lumière de celle de la source. Il s'agit de *Walther Ritz* qui, dans un article paru en 1908 dans les *Annales de Chimie et de Physique* [1], fit la critique de la théorie é. m. de Maxwell-Lorentz, dont Einstein avait respecté les équations fondamentales, et proposa une sorte de théorie de l'émission, selon laquelle l'agent producteur de la lumière était comme lancé par la source avec une vitesse relative constante, c, mais avec une vitesse absolue qui résultait de cette vitesse c et de la vitesse absolue de la source elle-même [2]. Par là, le principe de relativité, dont Ritz était un partisan convaincu, s'étendait à l'Optique et à l'E. M. aussi bien qu'à la Mécanique.

A priori l'idée de Ritz n'était pas moins acceptable en soi que l'idée d'Einstein. Mais, malheureusement pour Ritz, il fut démontré en 1913 par l'astronome de Sitter que les observations faites sur certaines étoiles doubles étaient incompatibles avec l'hypothèse que la lumière émise par les composantes de ces étoiles participe à leur vitesse. Einstein avait donc été bien inspiré en ne touchant pas à la thèse classique de l'indépendance de la vitesse de la lumière par rapport au mouvement des sources. Aussi bien faut-il ajouter que si Ritz avait cru pouvoir abandonner cette thèse, c'est parce qu'il avait renoncé à voir dans la lumière un phénomène lié aux variations d'un champ de forces ; tandis qu'Einstein, qui voulait conserver la théorie du champ de Maxwell-Lorentz, ne pouvait en aucune façon faire dépendre la vitesse de la lumière de celle de la source, une telle dépendance étant aussi inadmissible dans cette théorie que dans la théorie de l'éther.

---

(1) Walther Ritz : *Recherches critiques sur l'Electrodynamique générale* ; dans *Gesammelte Werke Walther Ritz.* 1 vol., Paris, Gauthier-Villars, 1911, p. 317 et suiv.

(2) *Ibidem*, p. 321 et 371.

16. Critique de la notion classique de simultanéité. Définition d'une simultanéité constatable. — Pour les classiques l'idée de la simultanéité de deux événements distants dans l'espace ne faisait pas difficulté : tout en se rendant compte qu'il était impossible de constater directement une telle simultanéité, il leur suffisait qu'elle soit *concevable*, et ils la regardaient comme légitimée par son aptitude à faire partie intégrante de toutes leurs théories.

Pour Einstein une relation à laquelle ne peut correspondre aucune opération réalisable n'a pas de réalité physique : l'affirmation de la simultanéité de deux événements ne sera donc légitime qu'autant qu'on saura définir des expériences permettant, du moins en principe, de la vérifier. Comment dans ces conditions obtenir une définition satisfaisante de la simultanéité ?

Comme un point de départ relevant de la perception est ici absolument nécessaire, Einstein tient pour acquis que la simultanéité de deux événements qui se passent *au même endroit* et par suite peuvent être l'objet d'une seule et même perception est perçue en même temps que ces événements. Puis, s'inspirant toujours du même esprit positif, il concrétise les données du problème en disant que la constatation d'une simultanéité locale revient pratiquement pour le physicien à la perception simultanée d'une position de l'aiguille d'une horloge et d'un événement qui se produit à l'endroit même où est l'horloge (1). De là l'introduction dans l'exposé de la théorie d'horloges idéales ayant toutes le même mouvement parfaitement régulier, et qui disséminées aux différents points des systèmes de référence pourront indiquer l'heure en chacun de ces points. La définition de la simultanéité à distance équivaudra dès lors à la détermination d'un procédé de réglage des horloges les unes sur les autres.

Plaçons-nous dans un système d'inertie S : en un point A de ce système est une horloge *a*, qui fournira l'heure du point A ; en un point B du même système une horloge *b* qui fournira l'heure du point B. Peut-on maintenant obtenir une heure commune aux deux points ? Oui, mais grâce à une convention qui permette d'établir une relation temporelle précise et contrôlable entre les dates de deux événements se passant respectivement en A et

---

(1) A. Einstein : *Sur l'Electrodynamique des corps en mouvement.* I, 1, éd. Solovine, p. 6.

en B. Or le postulat de la constance de la vitesse de la lumière dans toutes les directions à l'intérieur de tous les systèmes d'inertie nous fournit aisément la convention voulue.

Admettons en effet qu'un signal lumineux soit émis au point A à l'instant 0, heure de A ; arrive au point B à un instant t_1, heure de B ; s'y réfléchisse immédiatement et revienne en A à l'instant t_2, heure de A. Les deux horloges seront d'accord si $t_1 = \frac{t_2}{2}$; cela parce que les durées des deux trajets aller et retour du rayon lumineux ayant dû être égales d'après le postulat, le temps de l'aller, t_1, doit être égal à la moitié du temps de l'aller et retour, t_2 (1).

Voilà donc définie d'une façon positive la simultanéité de deux événements se passant *en deux points* d'un même système d'inertie : la définition peut du reste s'étendre au cas d'un nombre quelconque d'horloges liées au même système, de telle sorte que quand deux d'entre elles, *a* et *b*, seront séparément synchrones avec une même troisième *c*, elles seront aussi synchrones entre elles (2).

Mais cette définition repose sur une convention : que vaut-elle objectivement ? Voici la réponse, qui est d'une importance capitale : c'est que Einstein regarde sa définition de la simultanéité et du temps non pas comme arbitraire, mais comme *naturelle.* Le postulat qui la fonde lui paraît à ce point fondamental que sans lui on ne saurait concevoir dans le cas général aucune relation temporelle objective ; autrement dit le « *temps* » *défini en fonction de la vitesse de la lumière est le seul temps qui existe* (3).

17. Relativité de la nouvelle simultanéité. — Nous avons considéré jusqu'ici des horloges fixées dans un *même* système d'inertie et qui permettent de dater les uns par rapport aux autres tous les événements rapportés à ce système, ou qui indiquent le temps de ce système. Mais si l'on rapporte les mêmes événements à un *autre* système d'inertie, leurs relations temporelles seront-elles encore

(1) *Ibidem*, p. 7.

(2) On trouvera une démonstration de ce fait dans M. Von Laue : *La théorie de la Relativité.* Traduction G. Létang, t. 1, 1 vol. Paris, Gauthier-Villars, 1922, Ch. III, n° 6, p. 54.

(3) A. Einstein : *La Théorie de la Relativité restreinte et généralisée.* Traduction Rouvière, 1 vol. Paris, Gauthier.-Villars, 1921, ch. VIII, p. 17-20.

les mêmes ? En particulier deux faits simultanés pour le premier système S le seront-ils encore pour l'autre système S′ ? A cette question les classiques répondaient affirmativement ; pour eux les simultanéités étaient des relations *absolues*, c'est-à-dire indépendantes du choix du système de référence. A la même question Einstein sera obligé de répondre par la négative : pour lui la simultanéité de deux événements quelconques deviendra *relative*, en ce sens que ces deux événements pourront être simultanés ou non suivant le système de référence adopté.

Peut-on démontrer *isolément* à partir de la définition cette relativité de la nouvelle simultanéité ? Si c'est possible, ce n'est sûrement pas facile. En tout cas nous n'essaierons pas de le faire, d'autant que la relativité en question nous apparaîtra bientôt comme un corollaire de ce fait que la nouvelle théorie a besoin, pour dater les événements par rapport à deux systèmes de référence, de deux variables temporelles au lieu de la variable unique t des classiques.

Mais ce que nous pouvons dire dès maintenant, c'est que, étant donnée la nouvelle définition du temps dans chaque système d'inertie, on doit regarder comme *possible a priori* que les relations temporelles entre les événements ne soient plus les mêmes dans tous les systèmes. Admettant cette possibilité, nous serons donc conduits à introduire, dès le début de notre étude des relations entre les coordonnées d'un même événement rapporté à deux systèmes S et S′, deux variables temporelles t et t', nous réservant de les identifier après coup si le calcul ne révèle entre elles aucune différence. En fait nous verrons qu'elles ne sont pas identiques, et que par suite les relations de simultanéité ne sont plus absolues.

18. Abandon de l'éther. — L'éther jouait un double rôle dans les théories classiques : il servait à expliquer les phénomènes lumineux ou é. m. observables ; de plus il constituait un système de référence absolument privilégié pour l'Optique et l'E. M. Le souci d'expliquer les phénomènes observables, qui ont toujours pour siège des corps matériels, par des actions inaccessibles aux sens affectant l'éther impondérable avait depuis longtemps cessé de tourmenter la plupart des physiciens. Mais la croyance au privilège du système lié à l'ancien éther était demeurée tenace dans

beaucoup d'esprits ; c'est elle qui avait conduit Lorentz par exemple à édifier une théorie où l'équivalence de tous les systèmes d'inertie, admise comme un fait, s'expliquait par une compensation entre des changements réellement subis dans les systèmes d'inertie mobiles par certaines grandeurs qui dans le système absolu n'étaient pas modifiées. Pour Lorentz donc, le système absolu conservait objectivement son privilège, bien que les observations ne pussent le révéler.

Pour Einstein, le privilège n'existe plus, même en soi : la constance de la vitesse de la lumière dans toutes les directions — constance réservée autrefois au système lié à l'éther — devient une prérogative de tous les systèmes d'inertie, au même titre exactement. Or cette équivalence de tous les systèmes en ce qui concerne la vitesse de la lumière impliquait la négation de l'éther lui-même, puisque l'existence de l'éther entraînait précisément une variation de la vitesse suivant les directions dans les systèmes mobiles. Le principe de relativité, comme aussi le principe du mouvement relatif, qui excluait toute considération de vitesse absolue, conduisaient à la même négation. Aussi pourrions-nous caractériser, du moins négativement, la théorie de la relativité restreinte en disant qu'elle consiste avant tout *à nier radicalement l'éther et ses privilèges.*

Article III

TRANSFORMATION DE LORENTZ ET CINÉMATIQUE DE LA RELATIVITÉ

19. Evénements physiques et systèmes de référence. — Jusqu'ici nous connaissons surtout de la théorie d'Einstein les négations qui l'opposent à la théorie classique ; étudions-la maintenant sous son aspect constructif.

Les éléments premiers de la construction sont ce qu'Einstein appelle les *événements* physiques. Un événement est un phénomène observable qui suppose soit une double relation, spatiale et temporelle, entre deux particules matérielles, — par exemple la rencontre en tel point et à tel instant de deux particules ; soit un changement d'état d'une particule unique, — par exemple l'émission ou la réception d'un signal lumineux.

Les rencontres de particules ont ceci d'important que nos observations précises en physique ont presque toujours pour objet des coïncidences spatiales instantanées, qu'il s'agisse de la mesure d'une longueur, de la pesée d'une masse, de la lecture de l'heure sur une horloge, de l'observation d'une position d'aiguille sur un instrument gradué quelconque. Bref les événements que considère Einstein sont des données essentiellement positives et concrètes.

Einstein du reste conçoit d'une manière analogue les systèmes de référence : un système est pour lui un corps rigide où l'on pourra, du moins en principe, disposer des mètres pour mesurer des distances, et fixer des horloges qui, convenablement réglées, indiqueront l'heure en tout point du système. Et c'est ainsi qu'on pourra situer et dater dans chaque système de référence tous les événements physiques (1). Nous disons bien *tous* les événements physiques. De fait ces événements ne sont pas seulement des faits immédiatement observables ; ils sont aussi des faits *absolus*, en ce sens qu'ils sont indépendants du choix du système de référence, et qu'ils existent nécessairement pour tous les systèmes dès qu'ils existent pour l'un d'eux. Du reste c'est là ce qui les rend aptes à jouer le rôle d'éléments premiers dans la construction d'Einstein, laquelle comme toutes les constructions suppose des éléments et des relations absolus.

Les classiques considéraient déjà des événements physiques, bien entendu ; mais leur façon de les situer par rapport à leurs systèmes de référence était relativement simple. En raison du caractère absolu des simultanéités, ils pouvaient dater tous les événements de l'Univers par rapport à un même événement-repère à l'aide d'une seule variable bonne pour tous les systèmes, le temps universel t ; seules les trois coordonnées d'espace variaient d'un système à l'autre pour un même événement : x, y et z pour le système S ; x', y' et z' pour le système S$'$, et t pour l'un comme pour l'autre : Einstein au contraire devra utiliser autant de variables temporelles qu'il y a de systèmes d'inertie en mouvement les uns par rapport aux autres. Dans sa théorie un événement donné ne sera complètement situé dans l'espace

(1) Einstein : *Sur l'Electrodynamique des corps en mouvement*, I, 3, éd. Solovine, p. 12.

et dans le temps relativement aux divers systèmes de référence qu'au moyen de quatre variables par système, x, y, z, t pour S ; x', y', z', t' pour S', et ainsi de suite.

Nous avons signalé en commençant l'obligation où se trouve le physicien de savoir déduire les lois des phénomènes pour tel système de référence à partir de leurs lois pour tel autre système. Il est facile de prévoir en conséquence qu'une physique dans laquelle les dates des événements peuvent n'être pas les mêmes d'un système à l'autre diffèrera d'une physique dans laquelle les dates étaient les mêmes pour tous les systèmes. Quand on passera d'un système à l'autre, les équations exprimant les lois n'obéiront pas dans les deux physiques aux mêmes formules de transformation. Effectivement c'est par ses formules de transformation des coordonnées et par conséquent des lois que la physique d'Einstein s'opposera d'une manière radicale à la physique classique. Notre attention va donc se porter dans ce qui suit sur les formules de transformation des deux théories. Toutefois avant d'aborder cette question et pour mieux nous y préparer nous avons encore à préciser ce qu'on doit entendre en physique par durée et par longueur.

20. Les durées, intervalles temporels, et les longueurs, distances spatiales, entre événements-limites. — Si pour Einstein les événements sont des absolus, leurs relations ne le sont pas nécessairement : de fait il est impossible dans la nouvelle théorie de définir d'une façon absolue, c'est-à-dire sans spécifier le système de référence adopté, les intervalles de temps entre deux événements, c'est-à-dire les durées, non plus que les distances spatiales entre deux points.

Pour le faire comprendre, précisons d'abord ce qu'il faut entendre par durées et par distances *mesurables*, les seules qui pour Einstein intéressent le physicien. Une durée est l'intervalle de temps qui sépare les dates de deux événements ; et nous savons déjà comment dans la nouvelle conception ces dates sont des instants marqués par des horloges. De même les points où se passent deux événements limitent dans l'espace une distance ; mais pour mesurer une telle distance il faut la comparer à quelque longueur matérielle, et le problème de la mesure des distances se ramène à celui de la mesure des longueurs. Or la longueur d'un corps est la distance qui sépare les points extrêmes de ce corps *à un même*

instant donné. Dans les deux cas, on le voit, la grandeur temporelle ou spatiale est déterminée par deux *événements-limites.*

Pour les classiques une durée était déterminée par ses deux événements-limites d'une façon absolue, c'est-à-dire valable pour tous les systèmes de référence ; et pour pouvoir affirmer l'égalité absolue de deux durées, comme on devait le faire en particulier dans les opérations de mesure, il suffisait d'établir que ces deux durées s'écoulaient entre deux couples d'événements-limites deux à deux simultanés. De même la longueur à un instant donné d'un corps matériel — longueur égale à la distance des positions de ses extrémités à cet instant — était indépendante du choix du système de référence, et pour pouvoir affirmer l'égalité de deux longueurs il suffisait de constater les coïncidences simultanées de leurs extrémités prises deux à deux, quel que soit leur état de repos ou de mouvement relatif : cette condition suffisait, puisque la simultanéité des coïncidences était indépendante du système de référence adopté.

Pour Einstein, à cause de la relativité des simultanéités, les choses se présenteront autrement : les durées seront toujours déterminées par des événements-limites ; mais l'intervalle temporel entre deux événements donnés diffèrera d'un système à l'autre. De même la longueur d'un corps matériel sera toujours déterminée par la distance des positions simultanées de ses extrémités ; mais quand les deux extrémités auront occupé simultanément telles positions pour un système elles les occuperont successivement pour un autre, et pour cet autre système ce sera un autre couple de positions qu'elles auront occupées au même instant : la longueur du corps dépendra donc du choix du système de référence.

Mais nous ne prétendons ici qu'annoncer les différences qui se révèleront d'un système à l'autre entre les durées ou entre les longueurs. Bientôt le calcul nous apprendra quels sont leur sens et leur ordre de grandeur.

21. La transformation de Galilée et la mécanique classique. — Pour les classiques un événement physique déterminé — comme la position d'une particule matérielle en tel point et à tel instant — peut se situer dans l'espace relativement à un système d'inertie S au moyen des coordonnées du point, x, y, z par exemple, quand

on utilise des coordonnées cartésiennes rectangulaires. Relativement à un autre système d'inertie S′ le même événement a d'autres coordonnées spatiales, x', y', z'. Mais la même coordonnée temporelle t suffit à situer l'événement dans le temps relativement aux deux systèmes à partir d'une date origine commune.

Les coordonnées d'espace de S′ sont d'ailleurs liées à celles de S par des relations où entre nécessairement la vitesse relative des deux systèmes, puisque par définition deux systèmes de référence ne se distinguent que par leur mouvement relatif. Pour déterminer ces relations, supposons que les axes ox et $o'x'$ de S et de S′ coïncident ; que les origines o et o' aient coïncidé à un instant

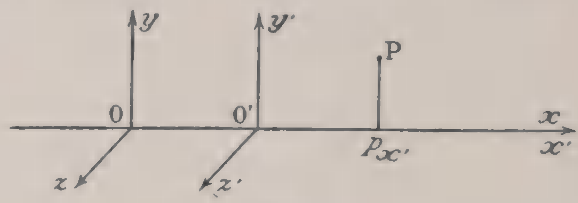

Fig. 3.

donné $t = 0$, lequel sera l'origine des temps pour les deux systèmes ; et qu'à partir de ce moment o' s'éloigne de o suivant l'axe ox et dans le sens $\overrightarrow{ox}$, à la vitesse v (fig. 3). Nous avons affaire de la sorte à un cas particulier simplifié, mais dont nous nous contenterons parce que dans le cas d'un mouvement r. et u. quelconque de S′ par rapport à S les raisonnements que nous allons faire demeureraient essentiellement les mêmes.

Dans ces conditions donc, un événement qui a pour coordonnées dans S, x, y, z, t a pour coordonnées dans S′ d'abord $x' = x - vt$, car à l'instant t la distance à o' de $p_{x'}$, projection sur $o'x'$ du point P où se passe l'événement, est égale à la distance ox, moins le trajet vt parcouru par o' à partir de o pendant le temps t ; ensuite $y' = y$ et $z' = z$, car ce sont là les distances du point P à deux plans respectivement confondus, le plan des $x'z'$ qui coïncide avec celui des xz, et le plan des $x'y'$ qui coïncide avec celui des xy ; enfin $t' = t$, à cause de l'universalité du temps classique.

De là les relations qui permettent de passer des coordonnées de l'événement dans S à ses coordonnées dans S′, ou inversement :

$$\text{I}\begin{cases} x' = x - vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} x = x' + vt' \\ y = y' \\ z = z' \\ t = t' \end{cases}$$

Ces formules forment *un groupe* : c'est-à-dire que si par exemple on les applique une première fois aux coordonnées relatives à S en donnant à v la valeur v_1, vitesse de S_1 par rapport à S, ce qui fournit les coordonnées relatives à S_1 ; une deuxième fois à ces coordonnées relatives à S_1, en donnant à v la valeur v_2, vitesse de S_2 par rapport à S_1, ce qui donne les coordonnées relatives à S_2 ; enfin une troisième fois aux coordonnées relatives à S en donnant à v la valeur $w = v_1 + v_2$, vitesse de S_2 par rapport à S, ce qui fournit encore les coordonnées relatives à S_2, on arrive les deux fois, pour ces coordonnées de S_2, identiquement au même résultat. Nos formules constituent le groupe de la cinématique classique, qu'on appelle aussi le groupe de Galilée ou la transformation de Galilée.

Dans tout groupe de transformation il y a des *invariants*, c'est-à-dire des relations que la transformation laisse les mêmes, ou, s'il s'agit de coordonnées, des grandeurs indépendantes du système de référence, ou des grandeurs absolues. Les invariants de la transformation de Galilée sont, outre les simultanéités, les durées qui séparent deux événements donnés et les distances qui séparent les points de l'espace où se passent deux événements simultanés. Quant à la relation caractéristique ou formule de composition du groupe — celle qui fait précisément que les formules forment un groupe — elle n'est autre que la formule classique d'addition des vitesses.

Ajoutons que pour obtenir les équations du mouvement d'un point relativement aux axes choisis il suffit de calculer par une première dérivation la façon dont les positions du point varient en fonction du temps, ce qui donne sa vitesse ; et par une seconde dérivation la façon dont sa vitesse elle-même varie au cours du temps, ce qui donne son accélération. Si l'on fait ces deux opérations d'abord à partir des coordonnées relatives à S, ensuite à partir des coordonnées relatives à S′, on trouve, bien entendu, que la vitesse résultante du point varie d'un système à l'autre, la différence étant précisément la vitesse relative des deux systèmes ; mais que son accélération résultante demeure la même : seules

les composantes de l'accélération suivant les axes varieraient d'un système à l'autre dans le cas où les axes des deux systèmes ne seraient pas deux à deux parallèles.

Une cinématique ne peut à elle seule constituer une physique : toute théorie physique fait intervenir des forces ou leur équivalent, et suppose par là même une dynamique, mais une dynamique qui se fonde sur la cinématique et en conserve les lois. De fait il existe aussi un groupe de la dynamique classique, déduit du groupe de la cinématique et de la relation fondamentale entre masse, force et accélération, et qui consiste en des formules de transformation donnant les équations du mouvement d'un point de masse connue, sous l'action d'une force donnée, relativement à un système d'inertie S′, à partir des équations de son mouvement relatives à un autre système d'inertie S, de vitesse connue par rapport à S′. La masse est un invariant de ce groupe, parce que pour les classiques elle est une grandeur absolue, grandeur *scalaire* — qui s'exprime par un simple nombre; la force est un autre invariant, mais un invariant *vectoriel*, c'est-à-dire qui implique une certaine orientation ; enfin l'accélération résultante est aussi, d'après ce qui précède, un invariant vectoriel ; et c'est pourquoi la relation fondamentale qui relie ces trois invariants peut prendre la forme absolue $f = m\gamma$.

Cependant il y a quelque chose qui peut varier d'un système à l'autre : ce sont les composantes suivant les axes de l'accélération, comme en cinématique, et par suite les composantes suivant les axes de la force. Les équations du mouvement d'un même point rapporté à deux systèmes d'inertie S et S′ différeront donc par ces composantes, mais auront dans les deux systèmes *la même forme.* Si par exemple les équations relatives à S sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \mathrm{X}, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = \mathrm{Y}, \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = \mathrm{Z},$$

X, Y et Z étant les projections de la force sur ox, oy et oz, les équations relatives à S′ seront

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = \mathrm{X}', \qquad m\frac{d^2y'}{dt^2} = \mathrm{Y}', \qquad m\frac{d^2z'}{dt^2} = \mathrm{Z}',$$

deux équations correspondantes ne différant que par les coordonnées elles-mêmes et les projections.

Mais cette identité de forme des équations du mouvement d'un point relativement à deux systèmes d'inertie quelconques ne se vérifiait pour les classiques qu'en mécanique proprement dite ; les équations fondamentales de l'E. M. exprimaient seulement les relations entre les variations des composantes du vecteur force électrique et du vecteur force magnétique rapportées au système *absolu* ; et quand on passait de ces équations absolues aux équations relatives à un système d'inertie mobile, il fallait faire intervenir la vitesse de ce système. Pour Einstein au contraire les équations de l'E. M. aussi conserveront la même forme dans tous les systèmes d'inertie, et en termes précis c'est en cela que consistera l'extension à toute la Physique du principe de relativité limité autrefois à la mécanique, car l'identité de forme des équations n'est autre chose que la traduction mathématique de ce principe.

22. La transformation de Lorentz et la cinématique d'Einstein. — Pour comprendre la théorie d'Einstein il nous faut commencer par étudier le groupe de transformation sur lequel elle repose et qui y joue le même rôle que le groupe de Galilée dans la mécanique classique. Lorentz avait utilisé le premier en E. M. les relations constitutives de ce groupe, qu'on appelle pour cette raison le groupe de Lorentz. Poincaré avait donné à ces relations leur forme parfaite et montré précisément qu'elles forment un groupe. Enfin Einstein, sans connaître les travaux de ses prédécesseurs, sut déduire le groupe de ses deux postulats fondamentaux, principe de relativité et constance de la vitesse de la lumière. C'est cette déduction qu'il s'agit pour nous de comprendre. Einstein a indiqué deux façons d'établir la transformation de Lorentz ; une dans son Mémoire de 1905 (1), une autre, plus accessible aux non-mathématiciens, dans sa brochure de vulgarisation de 1916 (2). Inspirons-nous de ce dernier travail.

Il nous faut d'abord préciser au point de vue mathématique la teneur des deux postulats. Celui de la constance de la vitesse de la lumière est facile à comprendre : soit un signal lumineux qui se propage ; quelle que soit sa direction dans un système d'inertie

---

(1) Einstein : *Sur l'Electrodynamique des corps en mouvement.* I. 3, éd. Solovine, p. 12-20.

(2) Einstein : *La Théorie de la Relativité,* éd. citée, app. p. 101-107.

S il a par rapport à ce système la vitesse c ; et quelle que soit sa direction dans un autre système S′ il a encore par rapport à ce système la vitesse c. Le principe de relativité se présente sous un double aspect : il implique d'abord que *les lois de la nature sont les mêmes* dans tous les systèmes d'inertie, d'où ces deux corollaires que si un phénomène — par exemple l'accélération d'un électron soumis à un champ — est déterminé par telles conditions dans un système S, des conditions identiques dans un autre système S′ y détermineront un phénomène identique au premier ; et que si deux grandeurs, par exemple deux périodes, deux masses d'atomes, deux longueurs de solides, ont entre elles une relation déterminée dans S, deux autres grandeurs qui dans S′ se définissent ou sont déterminées de la même façon que les premières dans S auront entre elles, dans S′, la même relation que celles-ci. Le principe implique d'autre part que *le changement d'aspect* d'un phénomène affectant un corps lié à S quand on l'observe de S′ est le même que le changement d'aspect d'un phénomène identique affectant un corps lié à S′ quand on l'observe de S : par exemple le changement de période d'une radiation émise dans S mais reçue dans S′ sera le même que le changement de période d'une radiation de même fréquence émise dans S′ et reçue dans S ; toutefois comme de tels changements dépendent nécessairement de la vitesse relative v des deux systèmes, il faut ajouter que cette vitesse peut figurer dans les formules qui les expriment avec le signe + ou avec le signe — suivant le système qui observe, ce qui résulte évidemment du fait que la vitesse de S′ par rapport à S est opposée à la vitesse S par rapport à S′.

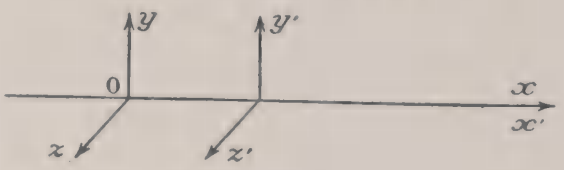

Fig. 4.

Cela posé, nous allons établir la transformation de Lorentz dans un cas particulier simple mais qui suffira pour nous la faire comprendre. Soient deux systèmes d'inertie S et S′, dont les axes oy, oz et $o'y'$, $o'z'$ sont respectivement parallèles, et dont les axes ox et $o'x'$ glissent l'un sur l'autre, o' s'éloignant de o dans le

sens des x positifs à la vitesse $+ v$ (fig. 4). Désignons par t et t' le temps de S et le temps de S' ; prenons comme origine des temps pour les deux systèmes l'instant $t = t' = 0$ où o et o' se sont croisés ; et considérons simplement les événements qui se passent au point de vue spatial sur ox, et sur $o'x'$.

Par rapport à S l'un de ces événements est défini par l'abscisse x du point et par la date t de l'instant où il a lieu ; par rapport à S' ses deux coordonnées d'espace et de temps sont x' et t'. Il nous faut des relations qui nous donnent x' et t' en fonction de x et de t, et réciproquement.

Si un signal lumineux qui a été émis en o — ou o' — au temps 0 voyage sur l'axe ox dans le sens $\overrightarrow{ox}$, — ou $\overrightarrow{o'x'}$ — l'équation de son mouvement de propagation par rapport à S est $x = ct$, ou $x - ct = 0$ (1). La propagation du même signal relativement à S' a pour équation, à cause de la constance de la vitesse de la lumière, $x' = ct'$, ou $x' - ct' = 0$. (2). Un événement quelconque qui satisfait à l'équation (1), par exemple l'arrivée du signal à l'instant t_1 du temps de S en un point P d'abscisse x_1, doit satisfaire aussi à l'équation (2), c'est-à-dire que le signal doit arriver à l'instant t'_1 du temps de S' qui correspond à t_1, au même point, dont l'abscisse dans S' est x'_1.

Les équations devant être toujours vérifiées simultanément, il faut que leurs premiers membres s'annulent en même temps et qu'on ait $x' - ct' = \lambda\,(x - ct)$ (3), où λ est une constante.

Pour un signal voyageant en sens opposé, on aurait les deux équations $x + ct = 0$ et $x' + ct' = 0$; ces deux équations devraient aussi être vérifiées en même temps ; d'où la condition $x' + ct' = \mu\,(x + ct)$ (4), où μ est aussi une constante.

Afin d'obtenir des relations qui nous donnent séparément x' et t' en fonction de x et de t, additionnons d'abord membre à membre les deux équations (3) et (4) ;

$$x' - ct' = \lambda x - \lambda ct, \tag{3}$$

$$x' + ct' = \mu x + \mu ct, \tag{4}$$

$$2x' = x(\lambda + \mu) - ct(\lambda - \mu),$$

$$x' = \frac{\lambda + \mu}{2}\,x - \frac{\lambda - \mu}{2}\,ct;$$

puis retranchons (4) de (3) :

(3) $$x' - ct' = \lambda x - \lambda ct,$$

(4) $$x' + ct' = \mu x + \mu ct,$$

$$-2ct' = x(\lambda - \mu) - ct(\lambda + \mu),$$

$$ct' = \frac{\lambda + \mu}{2} ct - \frac{\lambda - \mu}{2} x.$$

Pour abréger, posons $a = \frac{\lambda + \mu}{2}$ et $b = \frac{\lambda - \mu}{2}$; nos deux nouvelles équations deviennent

(5) $$x' = ax - bct,$$

et

(6) $$ct' = act - bx.$$

Il s'agit de déterminer les inconnues a et b en fonction des deux constantes qui figurent dans les données, v et c.

Or l'équation (5) où entrent x', x et t, exprime implicitement la loi du mouvement d'un point d'abscisse x', c'est-à-dire d'un point lié à S′, dans le système S ; considérons l'origine de S′ , d'abscisse $x' = 0$; si nous faisons $x' = 0$ dans l'équation (5), nous obtenons $ax - bct = 0$, ou $x = \frac{bc}{a} t$; $\frac{bc}{a}$ étant, comme λ, μ et c, une quantité constante, c'est là l'équation du mouvement dans S d'un point qui avait une abscisse nulle à l'instant $t = 0$, ce qui est justement le cas de o'. Donc la vitesse de o' par rapport à S est égale à $\frac{bc}{a}$.

Etablissons de même l'équation du mouvement dans S′ de l'origine o de S. Cette origine a toujours pour abscisse dans S $x = 0$; si nous faisons $x = 0$ dans les deux équations (5) et (6), nous obtenons les deux équations $x' = - bct$ et $ct' = act$. De la seconde nous tirons $t = \frac{t'}{a}$, et, en portant cette valeur de t dans la première, $x' = - \frac{bc}{a} t'$. C'est ici l'équation du mouvement dans S′ d'un point qui à l'instant $t' = 0$ avait une abscisse nulle, et c'est le cas de l'origine o de S ; donc la vitesse de o par rapport à S′ est égale à $-\frac{bc}{a} \cdot \frac{bc}{a}$ est donc en valeur absolue la vitesse relative des deux systèmes, que nous savons par ailleurs être égale à v ; et nous pouvons écrire

$$\frac{bc}{a} = v \qquad \text{et} \qquad \frac{-bc}{a} = -v.$$

Il nous faut une autre relation pour déterminer a et b : c'est la réciprocité des changements d'aspect des grandeurs de chacun des deux systèmes quand on les voit de l'autre système qui va nous la fournir.

Soit d'une part une longueur matérielle liée à S et qui coïncide avec un segment de l'axe ox, et d'autre part une longueur matérielle déterminée de la même façon que la première mais liée à S′ et qui coïncide avec un segment de l'axe $o'x'$. Le principe de relativité veut que, s'il y a une modification pour un observateur de S′ de la longueur de S, il y ait pour un observateur de S une modification pareille — au signe près de v tout au plus — de la longueur de S′. Or nous savons qu'une modification doit avoir lieu effectivement pour les longueurs si les simultanéités ne sont plus absolues : considérons donc une longueur S′ égale à x', et qui à l'instant $t' = 0$ de S′ coïncidait avec le segment $o'x'$; pour calculer la distance de ses extrémités dans S à un même instant t, c'est-à-dire sa longueur pour S, choisissons l'instant $t = 0$. L'équation (5) nous montre que pour cette valeur de t on a $x' = ax$, d'où $x = \frac{x'}{a}$. Donc une longueur x' de S′ a pour valeur $x = \frac{x'}{a}$ quand on l'observe de S.

Considérons maintenant une longueur x de S qui coïncidait à l'instant $t = 0$ avec le segment ox et cherchons la distance x' de ses extrémités o' et x' à l'instant $t' = 0$ de S′, distance qui est égale à sa longueur pour S′.

Pour $t' = 0$, l'équation (6) donne $act = bx$ (7), mais l'équation (5) donne $bct = ax - x'$ (8), ce qui va nous permettre de déterminer le rapport $\frac{x'}{x}$. Comme ce rapport doit s'exprimer finalement en fonction de v et de c, il nous faut éliminer t entre nos nouvelles équations (7) et (8) ; la première donne $t = \frac{bx}{ac}$; la seconde $t = \frac{ax - x'}{bc}$; d'où $\frac{bx}{ac} = \frac{ax - x'}{bc}$ et en simplifiant $b^2x = a^2x - ax'$ (9). Pour éliminer b, exprimons-le en fonction de a, v et c : nous avons déjà $\frac{bc}{a} = v$, d'où $b = \frac{av}{c}$, et $b^2 = \frac{a^2v^2}{c^2}$; d'où en portant ces valeurs dans (9) ;

$$\frac{a^2v^2}{c^2}x = a^2x - ax' ; \qquad a^2x\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = ax' ;$$

$$ax\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = x', \qquad \text{et finalement} \qquad \frac{x}{x'} = \frac{1}{a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}.$$

Mais nous avions $x' = ax$, d'où $\frac{x'}{x} = a$; et nous savons que d'après la réciprocité qu'exige le principe de relativité les deux rapports doivent être égaux, sous réserve du signe de v ; seulement v figurant ici au carré cette réserve est inutile, et nous pouvons écrire

$$a = \frac{1}{a\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}, \qquad \text{ou} \qquad a^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \qquad a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}};$$

ou encore, en posant $\beta = \frac{v}{c}$,

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

De cette valeur de a, et de la relation $\frac{bc}{a} = v$, nous pouvons déduire la valeur de b en fonction de v et de c :

$$bc\sqrt{1 - \beta^2} = v, \qquad \text{ou} \qquad b = \frac{v}{c\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

En remplaçant a et b par leurs valeurs dans (5) et (6), nous obtiendrons enfin les coordonnées x' et t' d'un événement pour S′ en fonction des coordonnées x et t du même événement pour S, et des constantes c et v : remarquant que $bc = \frac{v}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, et que $\frac{b}{c} = \frac{v}{c^2\sqrt{1 - \beta^2}}$, nous avons, au lieu de $x' = ax - bct$,

$$(a) \qquad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}};$$

et, au lieu de $ct' = act - bx$, ou $t' = at - \frac{b}{c}x$,

$$(b) \qquad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Cette équation nous prouve qu'il y a bien diversité des temps d'un système à l'autre.

Si nous ajoutons à ces deux équations (a) et (b) les relations $y' = y$, (c) et $z' = z$, (d), qui résultent de ce que rien ne distingue les deux systèmes dans les directions autres que celle de leur vitesse relative, nous aurons la transformation de Lorentz pour le cas particulier que nous avons envisagé.

Toutefois nos équations (a) et (b) qui donnent explicitement x' et t' en fonction de x et de t ne contiennent qu'implicitement les expressions de x et de t en fonction de x' et de t'. Pour expliciter ces nouvelles relations il nous suffit de résoudre les équations (a) et (b) par rapport à x et à t:
nous obtenons d'une part

$$(a') \qquad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

et d'autre part

$$(b') \qquad t = \frac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Avec les équations $y = y'$, (c') et $z = z'$, (d'), nous avons ainsi les huit équations qui expriment, dans les deux sens, la transformation de Lorentz pour le cas du parallélisme des axes et de l'orientation de la vitesse relative suivant ox, $o'x'$. On remarquera que au signe près de v les équations (a) et (a'), (b) et (b') sont les mêmes ; c'est la traduction en ce qui concerne les coordonnées de la *réciprocité des changements* quand on passe d'un système à l'autre. Quant au facteur $\sqrt{1-\beta^2}$, où la vitesse v figure au carré, il est le même dans les deux groupes d'équations, et y joue aussi un rôle conforme à la réciprocité. Comme ce facteur intervient très fréquemment dans la théorie, il est commode de lui attribuer un symbole plus simple : nous le désignerons par la lettre α. La transformation de Lorentz s'écrira alors :

$$x' = \frac{x - vt}{\alpha} \quad (a) \qquad\qquad x = \frac{x' + vt'}{\alpha} \quad (a')$$

$$t' = \frac{t - \dfrac{vx}{c^2}}{\alpha} \quad (b) \qquad \text{et} \qquad t = \frac{t' + \dfrac{vx'}{c^2}}{\alpha} \quad (b')$$

$$y' = y \quad (c) \qquad\qquad y = y' \quad (c')$$

$$z' = z \quad (d) \qquad\qquad z = z' \quad (d').$$ [1]

Montrons, pour finir, toujours en nous en tenant au même

[1] On trouverait une démonstration plus concrète et cependant rigoureuse des formules en question dans l'ouvrage suivant de M. Edmond Bauer : *La Théorie de la Relativité*. Préface de M. Langevin. 1 vol. IV-128 p. Paris, Eyrolles, 1922 (p. 103-108).

cas particulier, que le postulat de la constance de la vitesse de la lumière dans toutes les directions — et non plus seulement le long des axes ox et $o'x'$ —, peut se déduire des équations obtenues. D'après les deux postulats, pour une émission partie de l'origine o au temps $t = 0$, la loi de propagation dans le système S doit s'exprimer par l'équation

$$ct = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

ou, en élevant au carré,

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0. \tag{10}$$

Comme à l'instant $t = 0$, on avait aussi $t' = 0$, la loi de propagation dans le système S' doit s'exprimer par l'équation de même forme : $ct' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$ ou

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0. \tag{11}$$

Pour que ces deux équations (10) et (11) soient vérifiées simultanément il faut qu'on ait

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = \sigma(x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2),$$

où σ est une constante. Mais cette dernière équation doit être vraie en particulier pour les signaux qui voyagent sur ox et sur $o'x'$, c'est-à-dire dans le cas où y, z, y' et z' sont nuls ; et il faut avoir alors

$$x'^2 - c^2t'^2 = \sigma(x^2 - c^2t^2) ;$$

or, si nous retranchons l'équation (b) de la transformation de Lorentz de l'équation (a) nous obtenons, après avoir simplifié

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2,$$

ce qui montre que σ est égal à l'unité ; l'égalité que nous avons à déduire est donc

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2.$$

Mais nous avons déjà déduit

$$x'^2 - c^2t'^2 = x^2 - c^2t^2$$

des équations (a) et (b) ; les équations (c) et (d) nous donnent d'autre part

$$y'^2 = y^2 \qquad \text{et} \qquad z'^2 = z^2 ;$$

En additionnant membre à membre nous obtenons l'équation cherchée :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2,$$

qui exprime la constance de la vitesse de la lumière, quelle que soit la direction de propagation, dans tous les systèmes d'inertie.

23. Relations entre deux durées ou entre deux longueurs qui se correspondent dans deux systèmes d'inertie. — Les équations (a) et (b) — nous nous bornons toujours pour simplifier à l'axe des x — donnent immédiatement les deux coordonnées d'espace et de temps d'un événement pour S' en fonction de ses coordonnées pour S ; et c'est l'inverse pour (a') et (b'). Or ces équations nous permettent tout d'abord de démontrer que, dans la nouvelle théorie, les simultanéités ne sont plus, en général, absolues ; ou d'une façon plus précise que deux événements qui pour le système S par exemple se passent en deux points différents x_1 et x_2 de l'axe des x, mais au même instant t, — qui par suite sont simultanés pour S —, ne sont pas simultanés pour S' : en effet si l'on appelle t'_1 et t'_2 leurs dates relatives à S', on a d'après l'équation (b)

$$t_1' = \frac{t_1 - \dfrac{vx_1}{c^2}}{\alpha} \qquad \text{et} \qquad t_2' = \frac{t_2 - \dfrac{vx_2}{c^2}}{\alpha} ;$$

comme par hypothèse $t_2 = t_1$, tandis que x_2 est différent de x_1, t'_1 est nécessairement autre que t'_2 ; c'est-à-dire que les deux événements ne sont pas simultanés pour S'. On établirait de même que deux événements qui se passent en deux points différents de l'axe des x', mais au même instant pour S', ont lieu pour S à des instants différents.

Maintenant, nous avons dit plus haut que, si les simultanéités ne sont plus absolues, deux événements quelconques déterminent en les limitant autant de durées qu'il y a de systèmes d'inertie où l'on date ces événements ; et que d'autre part ces événements spéciaux que sont les positions simultanées des extrémités d'un corps matériel déterminent en les limitant autant de longueurs de ce corps qu'il y a de systèmes où l'on observe ces positions simultanées. Convenablement utilisées, les formules de Lorentz vont nous permettre de calculer la durée qui pour le système S'

s'écoule entre deux événements donnés, en fonction de la durée qui pour le système S s'écoule entre les deux mêmes événements, et *vice versa* ; et aussi la longueur d'un corps pour le système S' en fonction de la longueur du même corps pour le système S, et inversement.

Soient deux événements dont les coordonnées pour S sont respectivement t_0, x_0 et t_1, x_1 : ils limitent pour S une durée $d = t_1 - t_0$. Quelle est pour S' la durée d' limitée par les deux mêmes événements ?

Les coordonnées de temps des deux événements pour S' sont t'_0 et t'_1, et la durée cherchée est $d' = t'_1 - t'_0$. Ces deux valeurs de t' nous seront données en fonction de t_0 et x_0 et de t_1 et x_1, par la formule (b), qui exprime immédiatement t' en fonction de x et de t :
nous avons

$$t_0' = \frac{t_0 - \dfrac{v x_0}{c^2}}{\alpha} \qquad \text{et} \qquad t_1' = \frac{t_1 - \dfrac{v x_1}{c^2}}{\alpha} ;$$

d'où

$$t_1' - t_0' = \frac{t_1 - t_0 - \dfrac{v}{c^2}(x_1 - x_0)}{\alpha}, \qquad \text{ou} \qquad d' = \frac{d - \dfrac{v}{c^2}(x_1 - x_0)}{\alpha}.$$

Si les deux événements se passent pour S au même point, c'est-à-dire si $x_1 = x_0$, on a $d' = \dfrac{d}{\alpha}$: dans ce cas particulier, à une durée d de S correspond pour S' une durée d' plus grande, dans le rapport de $\dfrac{1}{\alpha}$ à l'unité.

Réciproquement si deux événements ont pour coordonnées dans S' x'_0, t'_0, x'_1 et t'_1, et y limitent une durée $d'_1 = t'_1 - t'_0$, les mêmes événements, de coordonnées t_0, x_0 et t_1, x_1 dans S y limitent une durée $d_1 = t_1 - t_0$ que nous calculerons d'après la formule (b'), et qui est

$$t_1 - t_0 = \frac{t_1' - t_0' + \dfrac{v}{c^2}(x_1' - x_0')}{\alpha} \qquad \text{ou} \qquad d_1 = \frac{d_1' + \dfrac{v}{c^2}(x_1' - x_0')}{\alpha}.$$

On remarquera que l'expression de d_1 en fonction de d'_1 est la même, au signe près de la vitesse v, que l'expression de d' en fonction de d : c'est un aspect de la réciprocité des changements qu'exige le principe de relativité.

Si les deux événements se passent au même point de S′, c'est-à-dire si $x'_1 = x'_0$, on a $d_1 = \frac{d_1'}{\alpha}$, comme on avait tout à l'heure $d' = \frac{d}{\alpha}$: l'identité de sens des différences avec l'égalité des rapports est un autre aspect de la réciprocité des changements de système à système.

Une durée a nécessairement pour limites deux événements qui se passent pour le système qui l'évalue à deux instants différents ; mais ces événements peuvent avoir lieu pour ce système ou bien au même point, *ou bien en deux points distants l'un de l'autre.* Pour limiter une longueur, il faut deux coïncidences qui aient lieu pour le système qui mesure en deux points différents bien entendu, mais de plus *à un même instant* ; car il est clair que la distance des positions non-simultanées des extrémités d'une règle peut être très différente de la longueur de cette règle (1).

Cette condition de simultanéité va nous guider dans le calcul d'une longueur l' relative à S′ à partir de la longueur correspondante l relative à S. Soit dans S, le long de l'axe des x, une longueur matérielle au repos, l, qui coïncide à un instant t quelconque avec un segment $\overline{x_0 x_1}$ de cet axe : cette longueur $l = x_1 - x_0$ a pour limites les deux coïncidences de coordonnées x_0, t et x_1, t de ses extrémités avec les points x_0 et x_1. Nous voulons connaître la longueur l' limitée par les mêmes coïncidences pour le système S′.

Plaçons-nous à l'instant t' du temps de S′ qui correspond à l'instant t de S et calculons les abscisses x'_0 et x'_1 qui correspondent aux abscisses x_0 et x_1, et dont la différence $x'_1 - x'_0$ est égale à l' par définition. La seule formule qui contienne à la fois x' que nous cherchons, t' qui doit être le même pour les deux coïncidences, et x qui nous est donné, est (a'). Ecrivons donc d'après (a') :

$$x_0 = \frac{x_0' + v t_0'}{\alpha} \qquad \text{et} \qquad x_1 = \frac{x_1' + v t_1'}{\alpha} ;$$

(1) Si la définition des longueurs est ainsi soumise à une condition restrictive qui n'a pas son pendant dans la définition des durées, c'est évidemment parce que dans la théorie les durées sont des grandeurs plus primitives, en un sens, que les longueurs (nous ne disons pas que les distances).

et rappelons-nous que $t'_0 = t'_1$. Par soustraction, nous obtenons

$$x_1 - x_0 = \frac{x_1' - x_0'}{\alpha}, \qquad \text{ou} \qquad l = \frac{l'}{\alpha}, \qquad \text{ou enfin} \qquad l' = \alpha l.$$

A la longueur l d'un corps lié à S correspond pour S′ une longueur l' plus petite dans le rapport de α à l'unité.

Réciproquement soit l'_1, la longueur d'un corps lié à S′ ; elle est limitée par les coïncidences de coordonnées x'_0, t' et x'_1, t' ; pour S les mêmes coïncidences, de coordonnées x_0, t et x_1, t, limiteront une longueur l_1, égale à $x_1 - x_0$, et que nous calculerons d'après la formule (a) :

$$x_1' - x_0' = \frac{x_1 - x_0}{\alpha} \qquad \text{ou} \qquad l_1' = \frac{l_1}{\alpha}, \qquad \text{ou enfin} \qquad l_1 = \alpha l_1'.$$

A la longueur l'_1 d'un corps lié à S′ correspond pour S une longueur l_1, plus petite dans le rapport de α à l'unité. Nous retrouvons ici encore l'identité de sens des différences et l'égalité des rapports, aspect de la réciprocité des changements qu'exige le principe de relativité.

On a appelé *dilatation* des durées, et *contraction* des longueurs, ces différences entre deux durées ou entre deux longueurs qui se correspondent dans deux systèmes d'inertie : comme ces expressions demandent à être interprétées nous ne pouvons nous dispenser d'en préciser le sens ; mais des explications sur ce point seront mieux placées plus tard. En attendant continuons notre exposé.

24. Temps propre d'une particule en mouvement r. et u. — Nous avons vu qu'une durée d peut être limitée par deux événements qui pour un système d'inertie donné se passent en un même point, et qu'alors la durée correspondante pour un autre système, d', est liée à la durée d par la relation $d = \alpha d'$.

Or la condition que les deux événements se passent au même point relativement à un système d'inertie est nécessairement réalisée dans le cas de deux événements affectant une *même particule* matérielle en mouvement r. et u. Ces événements en effet se passent au même point dans le système d'inertie lié à la particule. On appelle *durée propre*, ou élément de temps propre, de la particule tout intervalle de temps limité par deux événements qui la concernent.

Dans la formule que nous venons de rappeler c'est d qui représente la durée propre, et d' est la durée correspondante pour un système d'inertie par rapport auquel la particule a une vitesse v. On voit que la durée propre est toujours plus courte, dans le rapport de α à l'unité, que la durée relative à un système étranger quelconque. Pour souligner ce privilège de la durée propre, on désigne ordinairement le temps propre par la lettre τ, t représentant le temps d'un système d'inertie par rapport auquel la particule considérée est en mouvement ; on a donc $\tau = \alpha t$.

Ce résultat qui a été obtenu dans l'hypothèse d'une vitesse de S' dirigée suivant ox, est généralisable, en ce sens qu'il est vrai dans le cas d'une vitesse relative de la particule orientée d'une façon quelconque dans le système étranger. De plus comme la relation $d = \alpha d'$ existe évidemment entre deux durées élémentaires correspondantes, $d\tau$ et dt, de sorte qu'on a $d\tau = \alpha dt$, on en tire une relation importante entre les temps propres qui s'écoulent entre deux événements communs à deux particules, dont l'une a conservé entre ces deux événements un mouvement r. et u, tandis que l'autre a subi des accélérations. Mais nous ne faisons ici que signaler l'existence de cette relation sur laquelle nous aurons à revenir.

25. La nouvelle formule de composition des vitesses. — La transformation de Lorentz caractérise une cinématique nouvelle qui est à la base de toute la théorie d'Einstein, et que nous devons faire connaître tout d'abord. Pour cela, revenons encore à la transformation de Galilée et voyons comment elle permettait de calculer dans un cas simple la vitesse u' relative à S'd'un mobile animé dans S d'une vitesse constante u. Nous supposons comme toujours que S' a par rapport à S la vitesse v, dirigée suivant ox, et de plus que la vitesse u du mobile a même orientation que v. Il nous faut connaître deux événements-limites dépendant du mouvement, à savoir deux positions du mobile à deux instants différents.

Appelons t_0 et t_1 ces deux instants ; x_0 et x_1 les deux positions correspondantes du mobile pour le système S. La vitesse u, quotient du trajet par le temps de parcours, est, en fonction des coordonnées relatives à S,

$$u = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}.$$

Si nous appelons x'_0 et t'_0 et x'_1 et t'_1, les coordonnées des deux événements pour le système S′, la vitesse u' s'exprimera d'une façon analogue :

$$u' = \frac{x'_1 - x'_0}{t'_1 - t'_0}.$$

Mais nous savons que dans la théorie classique $t' = t$ pour toutes les valeurs de t ; d'où

$$t'_1 - t'_0 = t_1 - t_0.$$

Il nous reste à calculer les trajets ; la transformation de Galilée nous donne

$$x'_0 = x_0 - vt_0$$

et

$$x'_1 = x_1 - vt_1 ;$$

d'où, par soustraction,

$$x'_1 - x'_0 = x_1 - x_0 - v(t_1 - t_0).$$

Divisons par $t_1 - t_0$; nous obtenons

$$\frac{x'_1 - x'_0}{t_1 - t_0} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} - v$$

c'est-à-dire $u' = u - v$.

Si u et v étaient orientées en sens contraires, on aurait $u' = u + v$.

C'est, dans le cas particulier auquel nous nous bornons, la formule classique de composition des vitesses.

Calculons de la même manière, mais d'après la transformation de Lorentz, la vitesse u' relative à S′ d'un mobile qui a dans S la vitesse u, orientée suivant ox, comme la vitesse v de S′ par rapport à S.

Nous avons toujours

$$u = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} ;$$

et, par définition,

$$u' = \frac{x'_1 - x'_0}{t'_1 - t'_0}.$$

Mais ici t' diffère en général de t et nous ne pouvons plus dire que $t'_1 - t'_0 = t_1 - t_0$.

Pour simplifier les calculs supposons que le mobile se soit

trouvé en O, origine de S, au moment où O′ s'y trouvait, c'est-à-dire, d'après nos conventions ordinaires, à l'instant initial de S, $t = 0$ et à l'instant initial de S′, $t' = 0$. Dans ces conditions nous avons

$$x_0 = x'_0 = 0, \qquad \text{et} \qquad t_0 = t'_0 = 0\,;$$

d'où

$$u = \frac{x_1}{t_1} \qquad \text{et} \qquad u' = \frac{x'_1}{t'_1}.$$

La formule (a) nous donne

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\alpha}.$$

La formule (b)

$$t'_1 = \frac{t_1 - \dfrac{vx_1}{c^2}}{\alpha}\,;$$

d'où

$$u' = \frac{x'_1}{t'_1} = \frac{x_1 - vt_1}{\alpha} \cdot \frac{\alpha}{t_1 - \dfrac{vx_1}{c^2}} = \frac{x_1 - vt_1}{t_1 - \dfrac{vx_1}{c^2}}.$$

Divisons au second membre par t_1, pour que tous les termes soient des vitesses, au numérateur, ou de simples nombres, au dénominateur :

Nous obtenons :

$$u' = \frac{\dfrac{x_1}{t_1} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}\dfrac{x_1}{t_1}}, \qquad \text{ou} \qquad u' = \frac{u - v}{1 - \dfrac{uv}{c^2}},$$

et non plus comme chez les classiques $u' = u - v$.

Dans le cas d'une vitesse u orientée en sens contraire de v, un calcul tout pareil donnerait, à partir des formules (a') et (b'),

$$u' = \frac{u + v}{1 + \dfrac{uv}{c^2}}.$$

Considérons maintenant dans S une vitesse perpendiculaire à la vitesse v de S′, par exemple la vitesse u_y, dirigée suivant oy : quelle est la composante $u'_{y'}$, de la vitesse correspondante relative à S′ ? Avec des conditions initiales analogues à celles qui

viennent d'être précisées, nous avons, d'après les formules (c) et (b) de la transformation :

$$y'_1 = y_1 \qquad \text{et} \qquad t'_1 = \frac{t_1 - \frac{v x_1}{c^2}}{\alpha}\,;$$

d'où

$$u'_{y'} = \frac{y'_1}{t'_1} = \frac{\alpha y_1}{t_1 - \frac{v x_1}{c^2}},$$

et, en divisant au second membre par t_1,

$$u'_{y'} = \frac{\alpha \frac{y_1}{t_1}}{1 - \frac{v}{c^2}\frac{x_1}{t_1}} = \frac{\alpha u_y}{1 - \frac{v u_x}{c^2}}\,; \qquad \text{ou puisque} \qquad u_x = 0, \qquad u'_{y'} = \alpha u_y.$$

Une vitesse relative à S de direction quelconque dans le plan *oxy* pouvant toujours se décomposer en deux vitesses dont l'une est parallèle et l'autre perpendiculaire à v, on obtiendrait la vitesse correspondante pour S′ en transformant les deux composantes de la vitesse de S comme il vient d'être dit : la résultante des deux vitesses transformées serait la vitesse relative à S′.

Bien entendu les nouvelles formules de composition sont réversibles : c'est-à-dire que si par exemple après avoir ajouté selon la nouvelle loi d'addition $\vec{u}$ à $\vec{v}$ pour obtenir $u' = \dfrac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}$ on retranche $\vec{v}$ de $\vec{u'}$ suivant la nouvelle loi de soustraction, on retrouve la vitesse u. De fait on a

$$\frac{u' - v}{1 - \frac{u'v}{c^2}} = \frac{\dfrac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}} - v}{1 - \dfrac{v}{c^2}\cdot\dfrac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}} = \frac{\dfrac{c^2(u + v) - c^2 v - uv^2}{c^2 + uv}}{\dfrac{c^2 + uv - uv - v^2}{c^2 + uv}}$$

ou

$$\frac{uc^2 - uv^2}{c^2 - v^2}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{u(c^2 - v^2)}{c^2 - v^2} = u.$$

En cinématique classique on établit que les formules de transformation de Galilée forment un *groupe* par ce fait que si on les applique une première fois aux coordonnées relatives à S en

donnant à v la valeur v_1, vitesse de S_1 par rapport à S — ce qui fournit les coordonnées relatives à S_1, et une deuxième fois à ces coordonnées relatives à S_1, en donnant à v la valeur v_2, vitesse de S_2 par rapport à S_1, — ce qui donne les coordonnées relatives à S_2 ; ou bien une seule fois aux coordonnées relatives à S en donnant à v la valeur $w = v_1 + v_2$ vitesse de S_2 par rapport à S, ce qui doit donner encore les coordonnées relatives à S_2, on obtient pour ces dernières coordonnées par les deux procédés des résultats identiques.

On peut montrer que les équations de la transformation de Lorentz forment un groupe en procédant de la même façon, sauf qu'au lieu de $w = v_1 + v_2$ on doit attribuer à S_2 par rapport à S la vitesse $w = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$, v_2 étant la vitesse de S_2 par rapport à S_1, et v_1 celle de S_1 par rapport à S.

Effectivement les coordonnées relatives à S_2 obtenues par les deux procédés sont les mêmes. La relation caractéristique — ou la formule de composition — du groupe de Lorentz est, dans le cas particulier que nous avons envisagé, $w = \dfrac{v_1 + v_2}{1 + \dfrac{v_1 v_2}{c^2}}$, comme $w = v_1 + v_2$ était la formule de composition du groupe de Galilée.

Il ne nous est pas indispensable de connaître la formule de composition qui correspond au cas général d'une vitesse relative des deux systèmes orientée d'une façon quelconque relativement aux axes ; ce qui précède suffit à nous faire comprendre que cette formule caractérise une cinématique nouvelle, la cinématique *relativiste d'Einstein*, ou encore *la cinématique de la relativité*. On voit en quoi elle est nouvelle : quand on exprime relativement à un système d'inertie S′ la vitesse résultante u' d'un mobile qui a relativement à un autre système d'inertie S une vitesse propre u et qui est entraîné par ce système S′ avec une vitesse v par rapport à S, on trouve une vitesse qui n'est plus purement et simplement la somme géométrique de la vitesse propre u et de la vitesse d'entraînement v, mais qui est égale à $\dfrac{u + v}{1 + \dfrac{uv}{c^2}}$.

D'où vient la différence ? De la relativité des durées et des longueurs : en effet la vitesse résultante u' doit s'exprimer du point de vue de S′ ; or des deux vitesses données, u et v, v, qui

est au signe près une grandeur absolue, s'exprime bien en unités de S′ — comme en unités de S — ; mais u est donné en unités de S ; il faut donc transformer u, c'est-à-dire exprimer du point de vue de S′ le trajet parcouru dans S par le mobile et la durée du parcours, pour pouvoir composer u avec v ; et l'emploi de la transformation de Lorentz revient précisément à introduire les modifications des longueurs et des durées dans le calcul de la vitesse résultante, d'où la différence entre la vitesse résultante nouvelle et la vitesse résultante des classiques pour qui longueurs et durées étaient des grandeurs absolues.

Mais alors, va-t-on penser, si l'on se donne deux vitesses, u et v, relatives à un *même système* S, et qu'on cherche leur résultante du seul point de vue de S, il n'y a plus de raison de ne pas appliquer la formule classique de composition, puisque dans ce cas les durées et les longueurs, étant toutes relatives au même système de référence, n'ont à subir aucune transformation. C'est exact. Dans le cas dont il vient d'être question l'application de la formule classique est légitime, mais pour calculer la *somme* de deux vitesses données, et non leur résultante proprement dite. Un exemple permettra de saisir la différence. Soient deux mobiles A et B qui relativement à un même système S se meuvent sur une même droite mais en sens opposés : appelons respectivement u et $-v$ leurs vitesses relatives à S. La différence de leurs vitesses, calculée du point de vue de S, est bien $u - (-v) = u + v$; mais cette différence n'est nullement pour Einstein la vitesse de A par rapport à B ni celle de B par rapport à A. Dans la nouvelle cinématique la vitesse de A par rapport à B *résulte*, suivant la nouvelle formule de composition, de la vitesse de A par rapport à S exprimée du point de vue de S, et de la vitesse de S par rapport à B exprimée du point de vue de B, c'est-à-dire du point de vue d'un système lié à B.

Toute composition des vitesses suppose dualité des systèmes de référence, et, en cinématique relativiste, diversité des longueurs et des durées. Dans notre exemple, aux termes de la cinématique classique, $u + v$ était à la fois la différence des deux vitesses calculées du point de vue de S et la vitesse relative de A par rapport à B ; aux termes de la cinématique relativiste, cette différence est autre que la vitesse relative de A et de B.

Ajoutons un mot au sujet des accélérations : en cinématique

classique l'accélération d'un même point mobile était la même pour tous les systèmes d'inertie ; dans la nouvelle cinématique il en est autrement. Nous savons déjà que la transformation de la vitesse d'un point quand on passe de S à S′ diffère suivant que cette vitesse est parallèle ou perpendiculaire à la vitesse relative v des deux systèmes ; de même quand on calcule l'accélération γ' relative à S′ d'un point qui a dans S une accélération γ il faut distinguer l'accélération parallèle à v et les accélérations perpendiculaires. On démontre en particulier que, si γ_x et γ_y sont les accélérations d'un point suivant ox et suivant oy dans le système S où la vitesse du point est nulle, ses accélérations relatives à S′, $\gamma_{x'}$, suivant $o'x'$ et $\gamma_{y'}$, suivant $o'y'$, sont liées aux précédentes par les relations $\gamma_{x'} = \alpha^3\gamma_x$ et $\gamma_{y'} = \alpha^2\gamma_y$. Ces deux relations nous seront utiles pour l'étude des formules fondamentales de la nouvelle dynamique.

26. La vitesse de la lumière, grandeur invariante et vitesse relative limite pour tous les mobiles et pour tous les systèmes de référence. — La présence de la vitesse de la lumière, c, dans la nouvelle expression de la vitesse résultante entraîne deux conséquences importantes : d'abord la vitesse de la lumière se présente comme une grandeur invariante non plus seulement quand on se la donne d'emblée dans un système d'inertie quelconque, ce qui est alors postulé *a priori* ; mais quand on *la calcule* pour tel système d'inertie comme la résultante de sa grandeur c dans un autre système et de la vitesse de cet autre système par rapport au système considéré : d'après la formule de composition, en effet, dès lors que l'une des deux vitesses à composer a la valeur c, la résultante est elle-même égale à c en valeur absolue : ainsi la formule

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}$$

donne, si u est égal à c,

$$u' = \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} = \frac{c(c - v)}{c - v} = c.$$

Nous trouvons ici la solution de la difficulté signalée par Einstein

au sujet de la compatibilité des deux propriétés attribuées à la vitesse de la lumière, indépendance par rapport à la vitesse de la source et indépendance par rapport au choix du système de référence : je suis dans un système d'inertie S ; je considère une source liée à un autre système S′ qui a par rapport à moi la vitesse v ; les rayons qu'elle émet auront pour moi la vitesse c tout comme s'ils émanaient d'une source immobile dans mon propre système : de cette façon la vitesse de la lumière demeure bien toujours indépendante de la vitesse de la source sans cesser d'être comme l'exige le principe de relativité la même dans tous les systèmes d'inertie.

L'autre conséquence est que l'addition de deux vitesses de même sens inférieures à c donne toujours une résultante inférieure à c, comme le montre la discussion de la formule $u' = \dfrac{u+v}{1+\dfrac{uv}{c^2}}$. De là ce corollaire que la vitesse c joue dans la théorie le rôle d'une *vitesse-limite*. Cette vitesse apparaissait déjà comme une limite supérieure pour les vitesses relatives des systèmes de référence, puisque dans le facteur $\alpha = \sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}$ la quantité sous le radical ne peut être négative, et qu'elle le serait si v dépassait c. Cette limite ne devait même pas être atteinte, sans quoi le facteur α qui entre en dénominateur dans l'expression des coordonnées serait nul et les coordonnées correspondantes « infinies ». D'après la formule de composition, la condition que v soit inférieure à c sera toujours remplie, même quand la vitesse relative w de deux systèmes S et S_2 sera calculée comme la résultante de la vitesse v_1, de S_1 par rapport à S et de la vitesse v_2 de S_2 par rapport à S_1.

Il est à peine besoin d'ajouter que la valeur limite ne s'impose qu'aux vitesses des systèmes de référence — ou des corps — les uns par rapport aux autres, et nullement à la simple somme géométrique de deux vitesses rapportées, comme dans l'exemple cité plus haut, au même système de référence. Si nos mobiles A et B ont l'un et l'autre une vitesse égale à $\dfrac{2c}{3}$, la *somme* de leurs vitesses par rapport à S sera $\dfrac{4c}{3}$; mais ce ne sera point là, nous le savons, leur vitesse relative.

27. La cinématique d'Einstein déduite de l'idée d'une interdépendance possible des positions et des dates. — Depuis une centaine d'années on s'est montré très hardi en géométrie théorique : abandonnant des postulats suggérés par certains aspects du monde réel, on s'est mis à *construire* conceptuellement des espaces différents de l'espace euclidien classique et auxquels on n'imposait que la conformité aux exigences les plus essentielles de la notion très générale d'espace. Dans le domaine de la mécanique, même de la « mécanique rationnelle », on n'a pas, à beaucoup près, déployé la même hardiesse : se tenant très près de l'expérience, on semble s'être toujours donné pour tâche unique de mettre sur pied une théorie apte à représenter ou à expliquer systématiquement les mouvements observables. Et ceci est aussi vrai de la cinématique — et de la dynamique — de la relativité que de la mécanique classique elle-même.

Pourtant le fait que deux mécaniques différentes aient pu être conçues pour représenter le réel révèle la possibilité d'un travail purement constructif, qui serait analogue en mécanique au travail constructif des géomètres non-euclidiens. Nous voudrions montrer ici comment, en partant de certaines notions fondamentales impliquées dans l'idée même de cinématique, on peut aboutir en effet à des constructions cohérentes diverses.

Au lieu de postuler *a priori* comme les classiques un temps valable pour tous les systèmes, admettons la possibilité d'un temps relatif, c'est-à-dire une dépendance possible des *dates* des événements par rapport à leurs *positions* dans deux systèmes de référence en mouvement r. et u. l'un par rapport à l'autre ; de telle manière que les dates relatives aux deux systèmes d'un même événement ne puissent pas plus se déterminer abstraction faite de ses positions dans ces systèmes, que, du point de vue classique, les positions relatives à deux systèmes d'un même événement ne pouvaient se déterminer abstraction faite de sa date. Admettons de plus que les formules de transformation des dates et des positions forment un groupe, — ce qui n'est que la traduction mathématique du principe restreint de relativité : à quelle cinématique serons-nous conduits ?

La solution du problème est facilitée quand on postule en outre : 1° que l'espace est *homogène*, c'est-à-dire que suivant une direction donnée il présente en tous points les mêmes propriétés ;

et *isotrope*, c'est-à-dire qu'il a aussi mêmes propriétés dans toutes les directions ; 2° que le temps, qui n'a qu'une dimention, est homogène également. M. Lalan [1] a établi que dans les conditions qui viennent d'être précisées on aboutit à trois cinématiques différentes qu'on peut caractériser par trois formules d'addition des vitesses : voici sa déduction, qu'il a bien voulu nous permettre d'incorporer à notre exposé :

Soient S et S′ deux systèmes de référence réduits à deux axes, Ox et $O'x'$, glissant l'un sur l'autre, et soit v la vitesse de S′ par rapport à S. Un événement de coordonnées x et t par rapport à S a, par rapport à S′, des coordonnées x' et t' que l'on doit pouvoir calculer par des formules du type

$$x' = f(x, t, v) \quad \text{et} \quad t' = g(x, t, v).$$

Comme l'espace et le temps sont *homogènes*, tout événement peut à volonté jouer le rôle d'origine à la fois dans l'espace et dans le temps et un changement d'origine dans le système S ne doit entraîner dans les formules que des modifications qu'on pourra compenser par un changement corrélatif d'origine dans le système S′. En d'autres termes les formules doivent subsister si l'on change, en même temps que x et t en $x + x_0$ et $t + t_0$, x' et t' en $x' + x_0'$ et $t' + t'_0$, les quantités x'_0 et t'_0 étant des fonctions convenables de x_0, t_0 et v. On aura donc :

$$x' + x'_0 = f(x + x_0, t + t_0, v) \quad \text{et} \quad t' + t'_0 = g(x + x_0, t + t_0, v),$$

ou

$$f(x, t, v) + x'_0 = f(x + x_0, t + t_0, v)$$

et

$$g(x, t, v) + t'_0 = g(x + x_0, t + t_0, v).$$

Dérivons la première relation par rapport à x puis par rapport à t :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x + x_0, t + t_0, v) \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial t}(x, t, v) = \frac{\partial f}{\partial t}(x + x_0, t + t_0, v).$$

Ces formules montrent que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial t}$ ne dépendent effectivement ni de x ni de t, puisque les valeurs de ces fonctions ne sont pas modifiées quand on change x et t en $x + x_0$ et $t + t_0$, quels que soient x_0 et t_0. Donc ces dérivées ne sont fonction que de v :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lambda(v), \qquad \frac{\partial f}{\partial t} = \mu(v) ;$$

d'où pour $f(x, t, v)$ la forme nécessaire $f = \lambda(v)x + \mu(v)t + \rho(v)$.

---

(1) V. Lalan : ***Leçons sur les théories d'Einstein***, données à l'Institut Catholique de Paris en 1925-26 (non publiées).

Le même raisonnement montre que g est aussi linéaire en x et t :

$$g = \alpha(v)x + \beta(v)t + \gamma(v).$$

Nous pouvons supposer $\rho(v)$ et $\gamma(v)$ égaux à zéro : il suffit pour cela de prendre comme origine des espaces et des durées dans S′ l'événement qui sert de double origine dans S. Nous obtenons ainsi :

$$x' = \lambda(v)x + \mu(v)t \qquad \text{et} \qquad t' = \alpha(v)x + \beta(v)t. \tag{1}$$

Mais nous n'avons pas encore exprimé que le paramètre v désignait la vitesse de S′ par rapport à S. Considérons dans S′ le point qui pour $t = 0$ était à l'origine des espaces : à l'instant t il a pour coordonnée spatiale par rapport à S, $x = vt$. Or ce point n'est autre que l'origine de l'axe $O'x'$, et sa coordonnée spatiale x' est constamment nulle. Écrivons donc que $x = vt$ entraîne $x' = 0$ quel que soit t :

$$0 = \lambda(v)vt + \mu(v)t\ ;$$

ou en divisant par t,

$$\mu(v) = -\, v\lambda(v).$$

L'expression de x' est donc

$$x' = \lambda(v)\,(x - vt). \tag{2}$$

L'espace étant *isotrope*, les formules ne doivent pas être modifiées si nous changeons l'orientation des axes Ox et $O'x'$, en même temps que nous remplaçons v par $-v$. Or ces changements donnent

$$-\, x' = \lambda(-v)\,(-\, x + vt) \qquad \text{et} \qquad t' = -\, \alpha(-\, v)x + \beta(-\, v)t.$$

La comparaison avec les formules précédentes montre que

$$\lambda(-\, v) = \lambda(v), \qquad \alpha(-\, v) = -\, \alpha(v) \qquad \text{et} \qquad \beta(-\, v) = \beta(v)\ ; \tag{3}$$

et la résolution par rapport à x et à t des formules trouvées donne

$$x = \frac{\beta}{\lambda(\beta + \alpha v)}\, x' + \frac{v}{\beta + \alpha v}\, t' \tag{4}$$

$$t = \frac{-\, \alpha}{\lambda(\beta + \alpha v)}\, x' + \frac{1}{\beta + \alpha v}\, t'. \tag{5}$$

Mais le principe de relativité exige que les formules qui font passer de S′ à S soient de même forme que celles qui font passer de S à S′ : la seule modification à prévoir concernera le paramètre v, qui devra être remplacé par la vitesse v' de S par rapport à S′.

Considérons l'origine O de l'axe Ox : sa coordonnée spatiale par rapport à S est constamment nulle : $x = 0$; la loi de son mouvement par

rapport à S′ est fournie par la relation (4) qui lie x à x' et t' et où l'on fait $x = 0$: d'où, après simplification,

$$\frac{\beta}{\lambda} x' + vt' = 0, \qquad \text{ou} \qquad x' = -v\frac{\lambda}{\beta}t'.$$

La vitesse v' de S par rapport à S′ est donc

$$v' = -\frac{\lambda}{\beta}v. \tag{6}$$

Imposons simplement à v' la condition d'être développable en série entière suivant les puissances de v. Comme $\frac{\lambda}{\beta}$ doit d'après (3) être une fonction paire, v' doit être une fonction impaire :

$$v' = a_1 v + a_3 v^3 + a_5 v^5 + \cdots$$

Mais le principe de relativité exige que v soit la même fonction de v' que v' de v ; donc on doit avoir

$$v = a_1 v' + a_3 v'^3 + a_5 v'^5 + \cdots$$

En remplaçant dans cette dernière relation v' par son développement en v et en identifiant les coefficients des mêmes puissances de v, il vient

$$a_1^2 = 1, \qquad a_3 = a_5 = \cdots = 0.$$

Donc

$$v' = \pm v.$$

Nous prendrons $v' = -v$ pour nous conformer à l'usage, qui suppose les axes Ox et O′x' orientés dans le même sens. Ce choix entraîne, d'après (6), $\frac{\lambda}{\beta} = 1$.

Cela étant, les formules qui expriment x et t en fonction de x' et t' doivent prendre la forme.

$$x = \lambda(-v)(x' + vt'), \qquad t = \alpha(-v)x' + \beta(-v)t' ;$$

ou, en tenant compte des formules (3) et de la relation $\lambda = \beta$,

$$x = \lambda(v)(x' + vt'), \qquad t = -\alpha(v)x' + \lambda(v)t'.$$

En comparant avec (4) et (5) nous obtenons l'unique relation

$$\lambda = \frac{1}{\lambda + \alpha v}, \qquad \text{d'où} \qquad \alpha = \frac{1-\lambda^2}{\lambda v}.$$

Il ne reste plus dans les formules cherchées qu'une seule fonction indéterminée, λ :

$$x' = \lambda(x - vt), \qquad t' = \frac{1-\lambda^2}{\lambda v}x + \lambda t. \tag{7}$$

La forme de $\lambda(v)$ se déduira du fait que les formules (7) doivent être celles d'un *groupe* : la succession de deux transformations de paramètres respectifs v_1 et v_2 doit produire le même effet qu'une transformation unique, de paramètre v_3 convenablement choisi.

La première transformation donne

$$x' = \lambda_1(x - v_1 t), \qquad t' = \frac{1 - \lambda_1^2}{\lambda_1 v_1} x + \lambda_1 t.$$

La seconde, appliquée à la suite, donne

$$x'' = \lambda_2(x' - v_2 t'), \qquad t'' = \frac{1 - \lambda_2^2}{\lambda_2 v_2} x' + \lambda_2 t'.$$

D'où, en remplaçant x' et t' en fonction de x et t :

$$x'' = \left[\lambda_1\lambda_2 - \frac{\lambda_2 v_2}{\lambda_1 v_1}(1 - \lambda_1^2)\right]x - (v_1 + v_2)\lambda_1\lambda_2 t$$

$$t'' = \left(\lambda_1 \frac{1 - \lambda_2^2}{\lambda_2 v_2} + \lambda_2 \frac{1 - \lambda_1^2}{\lambda_1 v_1}\right)x + \left[\lambda_1\lambda_2 - \frac{\lambda_1 v_1}{\lambda_2 v_2}(1 - \lambda_2^2)\right]t.$$

Ces formules doivent être équivalentes à

$$x'' = \lambda_3(x - v_3 t), \qquad t'' = \frac{1 - \lambda_3^2}{\lambda_3 v_3} x + \lambda_3 t.$$

Ce qui montre d'abord que le coefficient de x dans l'expression de x'' doit être égal au coefficient de t dans l'expression de t'' :

$$\lambda_1\lambda_2 - \frac{\lambda_2 v_2}{\lambda_1 v_1}(1 - \lambda_1^2) = \lambda_1\lambda_2 - \frac{\lambda_1 v_1}{\lambda_2 v_2}(1 - \lambda_2^2),$$

d'où

$$\frac{\lambda_1^2 - 1}{\lambda_1^2 v_1^2} = \frac{\lambda_2^2 - 1}{\lambda_2^2 v_2^2}.$$

Mais v_1 et v_2 étant des paramètres indépendants, cette égalité ne peut avoir lieu que si les deux membres se réduisent à une même constante, k : donc $\dfrac{\lambda_1^2 - 1}{\lambda_1^2 v_1^2} = k$,

ce qui donne $\lambda_1^2(1 - k v_1^2) = 1$ et $\lambda_1 = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1 - k v_1^2}}$.

C'est le signe $+$ qui convient, car pour $v_1 = 0$, S et S' sont confondus et $x' = x$, ce qui montre que $\lambda_1(0) = +1$. En définitive,

$$\lambda(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - k v^2}}.$$

Il suffit d'achever l'identification pour obtenir la formule générale de composition des vitesses

$$v_3 = \frac{v_1 + v_2}{1 + k v_1 v_2},$$

ou, pour reprendre les notations usuelles,

$$u' = \frac{u + v}{1 + kuv}.$$ [1]

La constante k, qui doit avoir les dimensions de l'inverse du carré d'une vitesse, puisque kuv, comme 1, doit être un nombre, demeure indéterminée en grandeur et en signe ; mais suivant qu'elle sera nulle, positive ou négative on aura trois cinématiques distinctes.

Supposons d'abord que k soit nul : alors on a la formule $u' = u + v$; c'est la cinématique classique, qui comporte pour la transformation des coordonnées les formules de Galilée, avec le temps absolu.

Si nous excluons ce premier cas, nous pouvons remplacer k par $\frac{\pm 1}{V^2}$, V étant une autre constante qui a les dimensions d'une vitesse ; alors si $k = \frac{-1}{V^2}$, on a une cinématique nouvelle où les dates dépendent des positions, c'est-à-dire où le temps n'est plus absolu, mais qui diffère de la cinématique d'Einstein ; si $k = \frac{+1}{V^2}$, et qu'on donne à V la valeur c, on obtient la cinématique d'Einstein, comme on le voit par la formule d'addition

$$u' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}};$$

et à ce choix de la constante se rattachent des formules de transformation des coordonnées qui sont les formules mêmes de Lorentz. D'ailleurs, quelque valeur qu'on donne alors à V, cette vitesse joue dans la cinématique correspondante le rôle d'une vitesse limite invariante, comme la vitesse de la lumière dans la cinématique d'Einstein.

En somme, dès qu'on abandonne le temps absolu, on n'a plus le choix qu'entre deux cinématiques compatibles avec les propriétés fondamentales du temps et de l'espace euclidien et avec le

---

[1] M. E. Esclangon, puis M. Ed. Leroy, ont traité récemment le même problème, mais en le simplifiant : en particulier ils postulent, au lieu de l'établir, que la vitesse de S par rapport à S′ ne diffère que par le signe de la vitesse de S′ par rapport à S. Voir *C. R. de l'Acad. des Sciences*, 202, (1936), p. 708-712 et 794-795.

principe restreint de relativité [1] : l'une d'elles entraîne l'existence d'une vitesse-limite invariante et — à la grandeur près de cette vitesse — est identique à la cinématique qu'Einstein a déduite du principe de relativité et de l'existence *présupposée* d'une vitesse invariante.

28. L'intervalle spatio-temporel et son invariance. — Dans la théorie classique l'intervalle de temps entre deux événements quelconques, de même que la distance entre les points où se passaient deux événements simultanés, étaient des grandeurs invariantes.

D'après les formules de Lorentz-Einstein il n'en est plus ainsi, nous l'avons vu. Cependant ces formules révèlent l'existence d'une nouvelle grandeur invariante, définie elle aussi par deux événements-limites, et qu'on appelle leur *intervalle spatio-temporel.* Cet intervalle s'est présenté à nous, dans l'équation qui nous a servi à exprimer l'invariance de la vitesse de la lumière, comme la différence entre le carré c^2t^2 du produit de c par le temps t écoulé entre deux événements — émission d'un signal lumineux à l'origine 0 des coordonnées et à l'instant $t = 0$, et arrivée du signal au point, x, y, z, — et le carré, $x^2 + y^2 + z^2$, de la distance des points où les deux événements avaient lieu. Cette différence était alors nulle dans les deux systèmes. Mais une différence analogue existe dans le cas général où les deux événements ne sont plus nécessairement l'émission et la réception d'un signal lumineux.

Si les coordonnées du premier événement dans S sont x_0, y_0, z_0 et t_0, et celles du second x_1, y_1, z_1 et t_1, la différence s'écrit :

$$(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2 - c^2(t_1 - t_0)^2,$$

ou en notation différentielle

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2.$$

Cette différence, qui n'est pas nulle en général, est encore in-

---

[1] Il est aisé de voir que dans la cinématique qui suppose $k = \frac{-1}{V^2}$ la composition de deux vitesses finies peut donner une vitesse résultante infinie. Si l'on voulait regarder ce corollaire comme inacceptable on devrait conclure qu'en dehors de la cinématique classique il n'y a d'autre cinématique compatible avec les postulats énoncés que la cinématique même de la relativité.

variante, c'est-à-dire qu'elle est toujours égale à la différence correspondante relative à un autre système d'inertie S' :

$$dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2dt'^2.$$

Cette expression s'appelle ds^2. Souvent on désigne sous ce nom la même quantité changée de signe ; on a alors pour le système S

$$ds^2 = c^2dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)\,;$$

pour le système S'

$$ds'^2 = c^2dt'^2 - (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2)\,;$$

et toujours $ds^2 = ds'^2$ est l'intervalle spatio-temporel élémentaire qui joue dans la théorie le rôle d'invariant fondamental.

Dans le cas de deux événements éloignés dans le temps et dans l'espace, l'intervalle spatio-temporel s'appelle s^2 : si l et l' désignent les distances spatiales des deux événements pour les systèmes S et S' ; et d et d' les durées qui les séparent pour les mêmes systèmes, on a

$$s^2 = c^2d^2 - l^2 = c^2d'^2 - l'^2 = \text{etc.}$$

29. Relations entre les couples d'événements : la vitesse de la lumière, valeur limite de propagation des actions physiques. — s^2 étant une différence de carrés, on peut avoir $s^2 < 0$, $s^2 > 0$ ou $s^2 = 0$. Or de la valeur négative, positive ou nulle de cette quantité on peut déduire certains renseignements sur les relations entre les événements-limites [1].

D'abord on démontre que si s^2 est négatif, il existe toujours un système pour lequel $d = 0$, c'est-à-dire pour lequel les événements sont simultanés ; alors comme $c^2d^2 - l^2$ est constant $-l^2$ est maximum, et l minimum : la distance spatiale des deux événements a sa plus petite valeur dans le système où ces événements sont simultanés. On démontre de même que si s^2 est positif, il existe toujours un système pour lequel $l = 0$; alors d est minimum pour ce système où les deux événements se passent au même point.

On établit aussi que dans le premier cas, $s^2 < 0$, l'ordre de succession des deux événements peut être inversé, d pouvant

(1) Voir sur cette question : P. Langevin... *Le principe de Relativité*, 1 brochure, Paris, 1922, p. 30 et Jean Becquerel : *Le Principe de Relativité et la théorie de la gravitation*, 1 vol. Paris, 1922, p. 42 sq.

être positif pour certains systèmes et négatif pour d'autres ; mais que dans le deuxième cas, $s^2 > 0$, cet ordre de succession est absolu, le signe de d étant le même pour tous les systèmes. De là cette déduction, due à P. Langevin, que ce n'est pas seulement la vitesse relative de deux corps ou de deux systèmes de référence qui a pour valeur limite la vitesse de la lumière, mais encore *la vitesse de transmission d'une action physique quelconque.* En effet, supposons qu'une action physique puisse se propager avec une vitesse supérieure à c ; alors, dans le cas où s^2 est négatif et où l'ordre temporel des deux événements peut être inversé, il y aurait des systèmes pour lesquels l'un de ces événements, supposé causé par l'autre au moyen de cette action physique, serait antérieur à sa cause, ce qui est inadmissible. Si l'on postule au contraire que c est la valeur limite de la vitesse de propagation de toutes les actions physiques, on trouve que, dans le cas de $s^2 < 0$, le produit par la vitesse de la lumière de l'intervalle de temps entre les deux événements est plus petit que, leur distance (car on a $c^2d^2 - l^2 < 0$, ou $c^2d^2 < l^2$, donc $cd < l$) et que par suite aucune action physique d'un des événements sur l'autre n'est possible. Ce cas étant le seul où l'ordre temporel peut être inversé, jamais cette inversion ne s'opposera donc au principe de l'antériorité de la cause sur l'effet. La considération des rapports entre l et d montre que l'inégalité $s^2 > 0$ exprime la possibilité qu'un des événements détermine l'autre par une action qui se propage avec une vitesse inférieure à c, et l'égalité $s^2 = 0$ la possibilité que l'un des événements détermine l'autre par une action é. m. de vitesse c.

Article IV

THÉORIE RELATIVISTE DE L'E. M. ET DE L'OPTIQUE DES CORPS EN MOUVEMENT RELATIF

30. Cinématique et physique. — Nous avons indiqué comment la dynamique de Newton présupposait la cinématique du temps absolu, des longueurs invariantes et de la loi classique de composition des vitesses, et nous aurions pu en dire autant des autres branches de la physique classique.

Or, voici qu'une cinématique nouvelle est présentée par Eins-

tein comme répondant seule à la réalité : la physique allait-elle pouvoir s'en accommoder ?

Il fallait bien qu'Einstein se soit rendu compte à l'avance que l'adaptation était possible, du moins quant à l'essentiel, sans quoi il n'aurait jamais proposé sa théorie. Ce que nous devons donc essayer de comprendre maintenant ce sont les modifications que la cinématique nouvelle allait introduire dans les théories physiques. Une remarque générale s'impose immédiatement : c'est que la différence entre les durées ou les longueurs classiques et les durées ou les longueurs relativistes, ainsi que la différence entre les vitesses résultantes données par les deux formules de composition, sont très faibles tant que la vitesse relative v des systèmes de référence concrets utilisés est petite par rapport à la vitesse de la lumière, ce qui est toujours le cas ; aussi Einstein pouvait-il escompter l'*accord en première approximation* de sa théorie avec les résultats classiques dûment contrôlés. Encore devait-il établir positivement que cet accord approximatif avait lieu non seulement en cinématique pure et simple, mais en physique proprement dite, optique, E. M., et dynamique. Autrement dit, il lui fallait reconstruire de façon cohérente ces théories en fonction de sa cinématique, et retrouver, en première approximation tout au moins, les résultats classiques. Mais ce n'était pas assez : il devait aussi, pour justifier la hardiesse de sa conception, montrer que si l'on poussait plus loin la précision ses formules d'optique, d'E. M. et de dynamique conduisaient à des résultats au moins aussi exacts que les formules classiques ; il devait faire voir en particulier comment sa théorie résolvait ces fameux problèmes de l'optique des corps en mouvement qui faisaient depuis des années le tourment des physiciens.

Ce vaste programme présentait deux parties distinctes : l'une purement é. m. ou optique ; l'autre proprement mécanique. Les lois de l'E. M. et de l'optique des corps *au repos* dans un système d'inertie quelconque devenaient identiques aux lois de Maxwell-Lorentz pour le système absolu ; quant aux problèmes de l'E. M. et de l'optique des corps en mouvement relatif ils étaient susceptibles d'une solution cinématique pour ainsi dire toute prête : il suffisait pour les résoudre d'appliquer convenablement la transformation de Lorentz. Les problèmes de mécanique au contraire, où il était question de masses, de forces et d'accélérations

se compliquaient du fait de la nouvelle cinématique, et leur solution devait consister dans un véritable remaniement des relations dynamiques fondamentales.

Dans ses Mémoires de 1905 Einstein donne la solution de la plupart de ces problèmes, en commençant par l'E. M. et terminant par la dynamique. Après avoir rappelé le principe de la méthode suivie par Einstein, nous allons exposer dans le présent article les principes de l'E. M. et de l'optique relativistes, puis dans l'article suivant les principes de la nouvelle dynamique. Mais nous ne nous astreindrons pas à suivre toujours la méthode indiquée par Einstein lui-même : nous laisserons d'abord de côté plusieurs questions moins étroitement liées à la genèse ou au développement de la théorie ; et, dans les questions que nous traiterons, nous utiliserons souvent des raisonnements directs, plus accessibles aux non-mathématiciens, et qui furent proposés après coup par des disciples d'Einstein [1].

D'autre part, devant insister spécialement sur les points qui intéressent davantage la philosophie des sciences, et plus particulièrement sur la question des systèmes de référence et de leurs privilèges, nous aurons à préciser la nature des modifications que la théorie attribue à certaines grandeurs, puis à confronter la physique relativiste avec les exigences des deux principes qui l'ont inspirée, le principe de relativité et le principe du mouvement relatif : mais ceci fera l'objet d'un chapitre spécial.

En tout cela du reste c'est surtout le contenu essentiel de la doctrine que nous chercherons à saisir : nous nous attacherons à le dégager le mieux possible en insistant sur les résultats plutôt que sur les démonstrations, et en ne faisant appel aux formules qu'autant qu'il le faudra pour préciser les idées correspondantes.

31. Application de la transformation de Lorentz aux équations de Maxwell : l'E. M. relativiste et l'expérience. — Aussitôt après avoir fait connaître les principes de sa cinématique, donc, Einstein expose sa théorie de l'E. M. En formulant son principe de

---

[1] Nous nous inspirerons souvent dans ce qui va suivre de l'ouvrage de M. Jean Becquerel : *Le Principe de Relativité et la Théorie de la gravitation*. 1 vol. IX-342 p. Paris, Gauthier-Villars, 1922. Dans cet ouvrage l'auteur se réfère lui-même, à plusieurs reprises, à des travaux, publiés ou inédits, de M. P. Langevin.

relativité il avait supposé déjà la validité des équations de Maxwell dans tous les systèmes d'inertie. Mais nous savons qu'une théorie physique se doit d'énoncer non seulement les lois des phénomènes pour tel système ou pour telle catégorie de systèmes de référence, mais encore les formules de transformation qui permettent de déduire des lois supposées connues pour tel système les lois relatives à tel autre. Or les lois s'expriment par des équations, et la transformation ne pouvait consister qu'en un changement de certaines grandeurs figurant dans ces équations. D'après la transformation de Lorentz, deux sortes de grandeurs fondamentales, les longueurs et les durées, se modifient d'un système à l'autre ; on pouvait s'attendre à ce que certaines grandeurs dérivées — non seulement les vitesses et les accélérations, mais d'autres encore, comme les forces, se présentent désormais comme relatives elles aussi au système de référence. Seule la confrontation des équations de Maxwell avec les nouvelles formules de transformation pouvait faire savoir ce qu'il en était ; et c'est ainsi qu'Einstein va soumettre à la transformation de Lorentz les équations de Maxwell pour le cas du vide dans le système absolu.

Dans ces équations figurent les six composantes de deux vecteurs ; trois, X, Y, Z, qui représentent en unités électrostatiques la force électrique ; et trois autres, L, M, N, qui représentent en unités électro-magnétiques la force magnétique, en tel point x, y, z du champ et à tel instant t. Les équations sont des équations différentielles exprimant les variations de ces vecteurs quand on passe du point et de l'instant considérés à un point et à un instant très voisins. D'après le principe de relativité ces équations sont valables pour un système d'inertie quelconque, S par exemple, quand on y fait entrer les coordonnées d'espace et de temps relatives à S ; et pour un autre système S′ quand on y fait entrer les coordonnées relatives à S′. Mais il s'agissait de savoir, étant donnés les vecteurs relatifs à S pour le point x, y, z et l'instant t, quels seraient en fonction des vecteurs donnés les vecteurs correspondants pour S′, c'est-à-dire les vecteurs constitutifs des forces électrique et magnétique qui s'exerceraient, du point de vue de S′, au point et à l'instant x', y', z', t'. C'est en appliquant la transformation de Lorentz aux coordonnées d'espace et de temps des équations du système S qu'on devait obtenir les vec-

teurs pour S′ correspondants aux vecteurs donnés relativement à S.

Einstein effectue la transformation [1] et trouve six nouvelles équations dans chacune desquelles x, y, z, t sont remplacés par x', y', z', t' ; mais où les relations simples des équations primitives ont fait place, comme nous allons le voir, à des relations plus compliquées. C'était là une première forme des équations pour le système S′ ; mais le principe de relativité permettait d'écrire les équations pour S′ sous une autre forme, à savoir la forme même des équations du système S, les coordonnées relatives à S ayant simplement fait place aux coordonnées relatives à S′. Einstein écrit donc les équations de S′ sous leur forme simple ; et comme les deux systèmes d'équations pour S′ doivent représenter la même réalité physique, il arrive à déduire de la réciprocité de la transformation pour les deux systèmes les relations qui lient les vecteurs de S′ aux vecteurs correspondants de S.

Avec la disposition d'axes que nous avons supposée en cinématique ces relations sont les suivantes :

$$X' = X \qquad\qquad L' = L$$

$$Y' = \frac{Y - \beta N}{\alpha} \qquad\qquad M' = \frac{M + \beta Z}{\alpha}$$

$$Z' = \frac{Z + \beta M}{\alpha} \qquad\qquad N' = \frac{N - \beta Y}{\alpha}$$

Au signe près de la vitesse v $\left(\text{ici de } \beta = \frac{v}{c}\right)$ les mêmes relations donnent les vecteurs relatifs à S en fonction de ceux de S′.

Ces relations montrent qu'à une composante purement électrique (Y′ ou Z′) ou purement magnétique (M′ ou N′) d'un système peut correspondre dans l'autre système une combinaison de composantes des deux sortes $\left(\frac{Y - \beta N}{\alpha} \text{ par exemple}\right)$. Pour Maxwell le champ é. m. en un point et à un instant donnés était quelque chose d'*absolu* ; mais, comme nous le dirons plus tard, une force étrangère au champ naissait du fait du mouvement des charges ; pour Einstein, le champ sera toujours seul à agir sur les charges ; mais il devient quelque chose de *relatif* au système de référence

---

[1] Einstein : *Sur l'Electrodynamique des corps en mouvement*, II. 6, éd . Solovine, p. 27 et suiv.

adopté, puisque purement électrique par exemple pour S quand $L = M = N = 0$, il devient mixte pour S′, les équations donnant alors pour S′ d'une part le vecteur électrique

$$X' = X, \qquad Y' = \frac{Y}{\alpha}, \qquad Z' = \frac{Z}{\alpha},$$

et d'autre part le vecteur magnétique

$$L' = 0, \qquad M' = \frac{\beta Z}{\alpha}, \qquad \text{et} \qquad N' = \frac{-\beta Y}{\alpha}.$$

Cette nouvelle conception du champ ne va-t-elle pas entraîner en ce qui concerne les phénomènes observables des conséquences dangereuses pour la théorie ? Sans approfondir la question nous pouvons répondre d'abord que pour la presque totalité des phénomènes é. m. la théorie d'Einstein ne s'oppose à la théorie classique que par des divergences du second ordre en β, les termes du premier ordre qui figurent dans les équations ci-dessus établies correspondant précisément à la force classique étrangère au champ. Ces divergences étant inaccessibles aux observations, la nouvelle théorie peut se prétendre aussi conforme aux faits que l'ancienne. Toutefois il y a plus à dire : nous savons qu'il existe un cas où les observations auraient pu mettre en évidence un effet classique du second ordre s'il avait existé ; c'est le cas du condensateur de Trouton et Noble ; nous aurons à revenir sur cette expérience, mais nous pouvons dire tout de suite que l'effet prévu par la théorie classique et qui n'a pu être constaté ne doit pas se produire d'après la nouvelle théorie, laquelle de ce fait se trouve au total en meilleure posture que sa rivale.

Une fois les équations fondamentales transformées, Einstein peut en transformer d'autres concernant les phénomènes é. m. ou lumineux ; ce qu'il fait en particulier pour les équations classiques de la propagation d'une onde lumineuse plane dans le vide [1]. Dans ces équations entrent les vecteurs électrique et magnétique dont dépend l'amplitude des vibrations et par suite l'énergie lumineuse ; les coordonnées x, y, z, t, qui situent dans le système S les points où l'onde arrive et dans le temps de ce système les instants où elle y arrive ; enfin la fréquence du mouve-

[1] A. Einstein : *Sur l'Electrodynamique des corps en mouvement*. II, 7, éd. Solovine, p. 32 et suiv.

ment vibratoire et les cosinus des angles que font les normales à l'onde avec les axes du système. Einstein, pour trouver l'équation de propagation relative à un autre système S′, fait subir aux coordonnées x, y, z, t la transformation de Lorentz, et aux forces électrique et magnétique la modification qu'il a trouvée en transformant les équations générales de Maxwell ; il obtient ainsi les valeurs relatives à S′ de la fréquence, des angles que font avec les nouveaux axes les normales à l'onde transformée, et de l'amplitude, le tout en fonction des valeurs correspondantes relatives à S.

La relation entre la fréquence pour S et la fréquence pour S′ exprime selon sa théorie l'effet Doppler-Fizeau ; de même une différence qu'il trouve entre la direction des normales à l'onde primitive et la direction des normales à l'onde transformée est pour lui l'aberration (1) ; enfin les relations entre les forces électrique et magnétique dans les deux systèmes exprime une modification de l'énergie rayonnante quand on passe d'un système à l'autre, modification dont il déduit un autre phénomène connu, la pression de radiation.

Toutes ses formules du reste sont d'accord avec les formules classiques aux termes en β^2 près ; et l'on peut dire que presque tous les phénomènes de l'optique des corps en mouvement sont ainsi présentés par Einstein comme des conséquences immédiates de la nouvelle cinématique.

Les indications que nous venons de donner ne sauraient suffire à faire comprendre autrement que d'une façon très générale la théorie relativiste de l'optique des corps en mouvement, qui nous

---

(1) Il faut noter que cette façon de rattacher l'aberration à un changement de direction des normales à l'onde — ou de l'onde elle-même — quand on change de système de référence est spéciale à la théorie d'Einstein. Si l'on applique à l'équation de propagation la transformation de Galilée, on ne trouve pas de changement de direction quand on passe de S à S′ ; mais dans la conception classique les normales à l'onde ne coïncident avec les rayons lumineux que pour des récepteurs absolument fixes par rapport auxquels la vitesse est la même dans toutes les directions ; pour un récepteur mobile, la vitesse variant suivant la direction, les rayons diffèrent en général des normales à l'onde, et c'est en ceci que consiste l'aberration. Dans la conception d'Einstein au contraire, à cause de l'invariance de la vitesse de la lumière, rayons et normales coïncident dans tous les systèmes et l'aberration consiste dans le changement d'orientation de l'onde elle-même tel que le détermine la transformation de Lorentz.

intéresse tout spécialement, et il nous faut entrer sur ce sujet dans plus de détails. C'est ce que nous allons faire, mais en nous bornant pour l'instant à l'étude de trois problèmes qui supposent précisément des *sources et des récepteurs en mouvement relatif*, et dont la solution relativiste se rattache d'une façon immédiate à la transformation de Lorentz, à savoir l'*effet Doppler*, *l'aberration et « l'entraînement »* de la lumière dans les milieux transparents. Quant à l'optique des corps au repos relatif, nous y reviendrons plus tard, après que d'autres développements nous y auront mieux préparés.

32. Théorie relativiste de l'effet Doppler : accord avec les données expérimentales. — Soient, dans le vide, L, une source ponctuelle liée à un système d'inertie S, et R un récepteur lié à un autre système d'inertie S′, et animé par rapport à la source d'une vitesse constante — v. Dans le système S la source émet des radiations de période τ, τ étant une durée du temps propre de la source. Il s'agit de savoir quelle est en fonction de τ la période τ' des radiations que la source provoque dans le récepteur R, cette période étant évaluée bien entendu dans le système S′.

Raisonnons du point de vue du récepteur, c'est-à-dire de S′, puisque c'est la période de réception que nous avons à déterminer. Or de ce point de vue la source a une vitesse $+ v$, et d'autre part, tout comme dans la théorie classique, le calcul de la période de réception fera intervenir le mouvement de la source et la période d'émission. Mais si la vitesse de la source nous est donnée telle qu'elle est par rapport à S′, la période d'émission τ ne nous est connue que relativement à S, où la source est au repos. Il nous faut donc d'abord exprimer τ relativement à S′.

Appelons θ la valeur de τ évaluée du point de vue de S′ ; nous pouvons écrire $\tau = \alpha\theta$, puisque τ est une durée du temps propre de la source, et θ la durée correspondante pour un système dans lequel la source a la vitesse v ; maintenant nous pouvons raisonner comme faisaient les classiques dans le cas d'une source mobile et d'un récepteur absolument fixe, à condition d'attribuer à la source une période d'émission $\theta = \frac{\tau}{\alpha}$.

Désignons par L_0 et L_1, les positions de la source au commencement, $t = 0$ et à la fin, $t = \theta$ de l'émission d'une radiation (fig. 5) ;

par r_0 et r_1, les deux distances de la source au récepteur à ces deux instants ; par φ l'angle de la vitesse v de la source avec la direction $\overrightarrow{RL_0}$ prolongée : dans le cas représenté sur la figure cet angle est tel que L s'éloigne de R.

Le phénomène qui marque le commencement de la période dans la source produit son effet sur R à l'instant $t_0 = \frac{r_0}{c}$; celui qui marque la fin de la période produit son effet sur R à l'instant $t_1 = \theta + \frac{r_1}{c}$; et c'est la différence $t_1 - t_0$ qui représente la période de réception τ'.

On a donc

$$\tau' = t_1 - t_0 = \theta + \frac{r_1}{c} - \frac{r_0}{c} = \theta + \frac{r_1 - r_0}{c}.$$

Or, $\overrightarrow{L_0L_1}$ est égal à $v\theta$; d'autre part θ étant une durée très courte et r étant supposé grand par rapport à $v\theta$, les deux droites RL_0

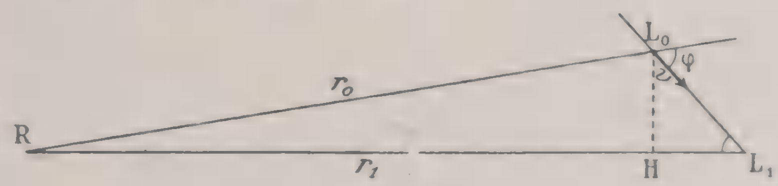

Fig. 5.

et RL_1 sont à très peu près parallèles ; l'angle $\widehat{L_0L_1R}$ est à peu près égal à φ ; et si l'on abaisse une perpendiculaire L_0H sur RL_1, on a aussi à très peu près $r_0 = \overline{RH}$ ou

$$r_0 = r_1 - \overline{HL_1}, \qquad \text{et} \qquad r_1 - r_0 = \overline{HL_1},$$

Mais on a aussi $\overline{HL_1} = v\theta \cos\varphi$; d'où $r_1 - r_0 = v\theta \cos\varphi$. Portant cette valeur dans l'expression de τ', nous obtenons

$$\tau' = \theta + \frac{v}{c}\theta \cos\varphi = \theta\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi\right).$$

Comme $\theta = \frac{\tau}{\alpha}$, la formule relativiste de l'effet Doppler est en définitive

$$\tau' = \frac{\tau}{\alpha}\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi\right).$$

Quand φ vaut $\frac{\pi}{2}$, $\cos\varphi = 0$; alors on a $\tau' = \frac{\tau}{\alpha}$; il y a dans ce cas un changement de période qui n'existait pas dans la théorie classique et qu'on appelle l'*effet Doppler transversal*.

Quand φ vaut 0 et $\cos \varphi = 1$, c'est-à-dire quand il n'y a qu'une vitesse radiale — laquelle est alors la vitesse relative des deux systèmes, v, on a

$$\frac{v}{c} = \beta, \qquad \text{et} \qquad \tau' = \tau \frac{(1 + \beta)}{\alpha};$$

c'est l'*effet Doppler longitudinal* (1) ; il ne diffère de l'effet classique que par le facteur α, c'est-à-dire au second ordre seulement : en effet la formule classique de l'effet Doppler pour un récepteur fixe et une source s'éloignant radialement à la vitesse v était

$$\tau' = \tau(1 + \beta).$$

La nouvelle théorie conduit donc à des résultats quelque peu différents des résultats classiques : cependant l'ancienne théorie pouvait se croire rigoureusement d'accord avec l'expérience, aucun fait ne l'ayant jamais contredite. C'est vrai ; mais en dépit des divergences signalées la théorie relativiste non plus ne se heurte à aucune donnée expérimentale positive : l'effet Doppler longitudinal, ou radial, tel qu'il se présente dans la théorie d'Einstein, ne diffère de l'effet classique qu'au second ordre en β ; et l'effet Doppler transversal, qui est spécial à la nouvelle théorie, n'est lui-même que du second ordre. Or si les observations actuellement possibles révèlent facilement les effets du premier ordre, elles ne pourraient absolument pas, faute de précision, révéler des effets du second ordre en admettant qu'ils existent. Du fait de cette imperfection de nos procédés actuels de mesure, l'expérience ne peut donc pas plus infirmer que confirmer la théorie relativiste de l'effet Doppler, et cette théorie peut aussi bien que la théorie classique se prévaloir d'un accord au moins négatif avec les faits.

---

(1) Comme $\alpha = \sqrt{1 - \beta^2}$, la formule pour $\varphi = 0$ s'écrit aussi

$$\tau' = \tau \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad \text{ou} \qquad \tau' = \tau \frac{1 + \beta}{\sqrt{1 - \beta}\,\sqrt{1 + \beta}},$$

ou enfin

$$\tau' = \tau \frac{\sqrt{1 + \beta}}{\sqrt{1 - \beta}}.$$

33. Théorie relativiste de l'aberration : accord avec les observations astronomiques. — Pour exposer le principe de la théorie nous emploierons une méthode qui permette d'appliquer indifféremment la transformation de Galilée ou celle de Lorentz et qui donne dans le premier cas l'aberration classique, dans le second cas l'aberration relativiste. Considérons *une source qui entre l'émission et la réception demeure immobile dans un même système d'inertie*, lequel sera pour l'aberration classique le système absolu, et pour l'aberration relativiste un système d'inertie quelconque, où d'après le principe de relativité les choses se passent comme dans l'ancien système absolu ; et bornons-nous au cas d'un récepteur animé dans le système de la source d'une vitesse constante v, perpendiculaire à la direction du rayon reçu, c'est-à-dire à la droite qui joint le point d'émission au point de réception.

Soient donc E la source, que nous supposons fixe dans le système S (fig. 6) ; $\overrightarrow{EO}$ la direction dans S d'un rayon issu de E ; et R un récepteur dont la vitesse v est perpendiculaire à EO. Nous considérerons deux événements du système S : les arrivées successives d'une même action issue de E aux points L et O de la direction du rayon. Prenons comme origine de S le point O ; comme axe des y positifs la droite $\overrightarrow{OE}$; comme axe des x positifs la droite ox qui marque aussi la direction et le sens de la vitesse v de R. Si S′ est un système dans lequel R est immobile, v sera aussi la vitesse de S′ par rapport à S ; si de plus nous prenons R comme origine de S′, et l'instant du passage de R en O comme origine commune des temps, les formules habituelles de transformation seront applicables ; nous pouvons supposer enfin que c'est à l'instant initial commun, $t = t' = 0$, que l'action arrive à la fois en O et en R.

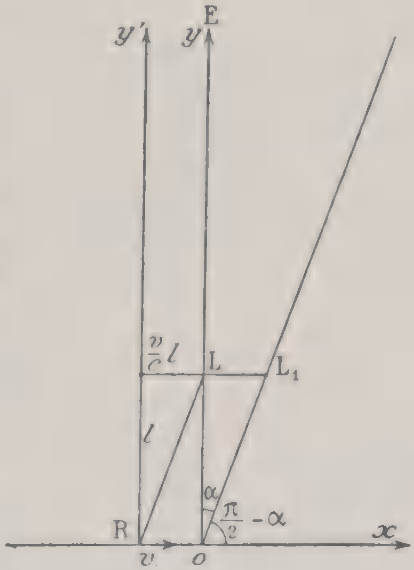

Fig. 6.

Cela posé, exprimons les coordonnées des deux événements par rapport à S : le second événement, arrivée de l'action en O, a pour coordonnées

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_2 &= 0 \\ y_2 &= 0 \\ t_2 &= 0 \end{aligned} \right.$$

et le premier, arrivée de l'action en L, a eu pour coordonnées

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1 &= 0 \\ y_1 &= \overline{\mathrm{OL}} = l. \\ t_1 &= -\frac{l}{c} \end{aligned} \right.$$

Effectuons maintenant la transformation pour obtenir les coordonnées des deux événements relativement à S′. D'abord la transformation de Galilée, ce qui suppose la conception classique d'après laquelle S est le système absolu : relativement à S′ nous avons pour le second événement :

$$(2') \qquad \left\{ \begin{aligned} x_2' &= 0 \\ y_2' &= 0 \\ t_2' &= 0 \end{aligned} \right.$$

et pour le premier

$$(1') \qquad \left\{ \begin{aligned} x_1' &= x_1 - vt_1 = -vt_1, \text{ car } x_1 = 0 \\ y_1' &= y_1 \qquad\quad = l \\ t_1' &= t_1 \qquad\quad\ = \frac{-l}{c} \end{aligned} \right.$$

Interprétons ces valeurs des coordonnées dans les deux systèmes. Pour S les abscisses des deux événements sont nulles : $x_1 = x_2 = 0$, et les deux événements se passent sur *oy* ; donc si dans ce système on veut recevoir le rayon dans une lunette liée aux axes et de longueur l par exemple, il faudra que L, l'objectif, se soit trouvé sur *oy* au moins à l'instant t_1, et que R l'oculaire se trouve sur *oy* au moins à l'instant t_2, autrement dit que la lunette qui est fixe dans le système y soit dirigée suivant *oy*.

Pour S′ l'abscisse du second événement est nulle : mais l'abscisse du premier a été positive, car $x_1' = -vt_1$; mais comme

$$t_1 = -\frac{l}{c}, \qquad x_1' = \frac{v}{c} l.$$

Donc si dans S′ on veut recevoir le rayon dans une lunette liée aux axes et de longueur convenable, il faut que l'oculaire soit en R, donc sur $o'y'$ à l'instant t'_2, et que l'objectif ait été à l'instant t'_1 en avance par rapport à $o'y'$, et dans le sens de v, de la longueur $\frac{v}{c}l$, puisqu'il a dû avoir l'abscisse $\frac{v}{c}l$ à cet instant t_1'.

Cette différence d'abscisse des deux extrémités de la lunette est d'ailleurs constante, puisque la lunette est liée au système. Donc, comme le montre la figure, l'instrument doit être orienté suivant OL_1, c'est-à-dire que si l'on appelle angle d'aberration l'angle $\alpha = \widehat{EOL_1}$ que fait la direction du rayon réel avec la lunette, on a $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ou

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{y_1'}{x_1'} = l : \frac{v}{c}l = \frac{c}{v}; \qquad \text{ou} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{c} = \beta.$$

C'est la formule classique de l'aberration dans le cas d'un rayon réel perpendiculaire à la vitesse v du récepteur. Dans le cas général où v fait avec le rayon l'angle φ on trouverait en première approximation

$$\operatorname{tg}\alpha = \beta \sin\varphi.$$

Avant d'effectuer la transformation de Lorentz rappelons encore que dans le système d'inertie S où la source est fixe tout se passe pour Einstein comme dans l'ancien système absolu. Nous avons donc le droit de considérer comme données dans ce système la direction de propagation EO, et les deux arrivées d'une même action en L puis en O.

Les deux événements ont toujours dans S les coordonnées que nous avons dites :
le premier

$$(1) \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = l \\ t_1 = -\dfrac{l}{c} \end{cases}$$

et le second

$$(2) \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = 0 \\ t_2 = 0 \end{cases}$$

Nous cherchons leurs coordonnées pour S′ d'après la transformation de Lorentz : pour le second, nous avons toujours $x'_2 = y'_2 = t'_2 = 0$; et pour le premier,

$$x_1' = \frac{x_1 - vt_1}{\alpha} = \frac{-vt_1}{\alpha} \qquad \text{car} \qquad x_1 = 0$$

$$y_1' = y_1 \qquad = l$$

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{vx_1}{c^2}}{\alpha} = \frac{t_1}{\alpha}, \qquad \text{car} \qquad x_1 = 0.$$

Mais comme

$$t_1 = \frac{-l}{c}, \qquad x_1' = \frac{-vt_1}{\alpha} = \frac{v}{c}\cdot\frac{l}{\alpha}.$$

Raisonnant comme tout à l'heure nous voyons que la lunette doit être orientée à peu près comme précédemment, c'est-à-dire de telle façon que l'on ait, en appelant a l'angle d'aberration relativiste,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \frac{y_1'}{x_1'} = l : \frac{v}{c}\cdot\frac{l}{\alpha} = \alpha\cdot\frac{c}{v},$$

ou

$$\operatorname{tg} a = \frac{\beta}{\alpha}.$$

C'est la formule relativiste de l'aberration dans le cas d'une vitesse du récepteur qui fait un angle droit avec la direction qu'a reçue le rayon dans le système où la source est immobile ; elle ne diffère que par le facteur $\frac{1}{\alpha}$, donc au second ordre seulement en $\frac{v}{c}$, de la formule classique. Dans le cas où au lieu d'un angle droit on aurait affaire à un angle φ quelconque on trouverait

$$\operatorname{tg} a = \frac{\cos\varphi + \beta}{\alpha \sin\varphi} ;$$

formule qui redonne bien la précédente quand $\varphi = \frac{\pi}{2}$ et que

$$\cos\varphi = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin\varphi = 1.$$

Cette formule non plus ne diffère qu'au second ordre en $\frac{v}{c}$ de la formule classique correspondante.

Ce que nous venons d'exposer, c'est simplement le principe de la théorie relativiste de l'aberration. Quand on veut appliquer ce principe aux données réelles, on s'aperçoit que la question

est passablement complexe. Pour la traiter nous allons rappeler d'abord comment les classiques résolvaient les divers cas concrets d'aberration ; après quoi nous montrerons comment les mêmes problèmes se résolvent du point de vue relativiste.

Dans la *théorie classique*, aux termes de laquelle il existe un système absolu, des positions absolues des points d'émission et des directions absolues des rayons issus de ces points, une première distinction s'impose entre l'*aberration réelle* — c'est-à-dire le fait pour un récepteur en mouvement transversal relativement aux rayons reçus de les recevoir avec une lunette inclinée par rapport à eux dans le sens du mouvement ; et l'*aberration observable*, c'est-à-dire le fait pour un récepteur dont la vitesse relativement aux rayons a changé d'une observation à une autre de constater un déplacement apparent de la source supposée fixe. La distinction s'impose parce que dans le cas d'une vitesse constante du récepteur l'aberration réelle ne saurait être objet d'expérience, du moins tant que la position de la source n'est connue que par la réception des rayons émis, comme il arrive ordinairement. Il est clair que si l'aberration réelle peut exister sans être observable, l'aberration observable, elle, présuppose toujours l'aberration réelle.

Maintenant si l'on veut être en mesure de traiter tous les cas, une nouvelle distinction est nécessaire en ce qui concerne le mouvement de la source : cette source peut être demeurée au même point pendant tout le temps de la transmission : alors un récepteur fixe la voit où elle est ; il n'y a pas d'aberration du tout. Un récepteur mobile la voit en avant de sa position vraie : il y a aberration réelle ; un récepteur dont la vitesse change dans l'intervalle de deux observations voit la source dans deux directions différentes : il y a aberration observable.

Mais la source peut aussi s'être réellement déplacée pendant la transmission : alors un récepteur fixe la voit dans sa position d'émission du rayon reçu, et pour la ramener à sa position actuelle il doit tenir compte de la durée de transmission — donc de sa distance au point d'émission — et du mouvement absolu de la source sur sa trajectoire. Cet écart entre la position actuelle véritable de la source et sa position actuelle apparente s'appelle l'*aberration planétaire*, parce qu'il se présente dans l'observation des planètes. Par opposition l'autre aberration s'appelle *aberration proprement dite*, ou encore aberration des fixes, c'est-à-dire des

étoiles fixes. Dans la même hypothèse un récepteur mobile voit la source en avant de la position qu'elle occupait en émettant le rayon reçu, position qui n'est d'ailleurs plus la position actuelle. Il y a donc à la fois aberration proprement dite et aberration planétaire : pour passer de la position apparente à la position actuelle vraie les deux corrections sont nécessaires.

Appliquons ces distinctions aux quatre principaux cas concrets d'aberration, qui supposent la visée par un observateur terrestre d'une étoile fixe, du soleil, d'une planète, et d'une source terrestre. Rigoureusement parlant, il faudrait tenir compte de la rotation de la Terre ; pour simplifier nous en ferons abstraction, et nous n'attribuerons à l'observateur qu'une vitesse absolue w égale à la somme de la vitesse d'entraînement constante, u, du système solaire, et de la vitesse propre variable en direction mais à peu près constante en grandeur, v, de la Terre sur son orbite.

a) T, notre observateur, vise une étoile « fixe » E : on entend ici par étoile fixe une étoile dont la distance est assez grande pour que sa parallaxe soit nulle. Alors il y a aberration réelle correspondant à la vitesse absolue $w = u + v$; de plus, dans le cas de plusieurs observations successives, et à condition de négliger des termes du second ordre au moins en $\frac{v}{c}$, on trouve une aberration observable qui correspond seulement aux variations de la vitesse propre v, cette vitesse seule ayant changé d'une observation à l'autre.

b) T observe le soleil dont la vitesse absolue est u. Il y a aberration réelle correspondant à la vitesse $w = u + v$; mais, au premier ordre toujours, l'aberration due à la vitesse d'entraînement u de la Terre est *compensée* par la vitesse égale du soleil, si bien que l'aberration observable ne correspond qu'aux variations de la vitesse v.

c) T observe une planète, J, dont la vitesse d'entraînement est u et la vitesse propre v' ; l'aberration réelle correspond toujours à $w = u + v$; mais il y a compensation de la part d'aberration due à la vitesse u de la Terre par la vitesse d'entraînement égale de la planète ; aussi y aura-t-il aberration proprement dite observable correspondant aux seules variations de v, et aberration planétaire correspondant à v'.

d) T observe une source terrestre dont la vitesse absolue est

$w = u + v$; l'aberration réelle se trouve compensée par la vitesse de la source, et tout se passe comme s'il n'y avait pas d'aberration du tout [1].

Tels sont les résultats qu'il s'agit de retrouver, dans la mesure où ils sont dûment vérifiés, en partant de la *théorie* relativiste. Or il est essentiel ici de noter que, là où elle s'impose, la double correction classique d'aberration proprement dite et d'aberration planétaire peut être remplacée, si l'on s'en tient au premier ordre, par une correction unique d'aberration proprement dite calculée d'après la seule *vitesse relative* du récepteur et de la source, et que, faute de précision, l'expérience serait impuissante à décider entre les deux résultats. Par exemple il est indifférent pour l'astronome de passer de la position apparente de Jupiter à l'instant t à sa position réelle au même instant en faisant d'abord la correction d'aberration proprement dite correspondant à v puis la correction d'aberration planétaire correspondant à v', ou bien en faisant une correction unique d'aberration proprement dite correspondant à la vitesse relative $\vec{v} + \vec{v}'$, vitesse qu'on peut regarder comme constante pendant le temps de transmission, toujours compris entre une demi-heure et une heure. Comme nous allons le voir *c'est sur cette équivalence que repose l'applicabilité de la théorie relativiste aux cas concrets d'aberration.*

Pour Einstein il n'y a plus ni système absolu privilégié en optique, ni positions absolues des centres d'émission, ni directions absolues des rayons émis. Mais ce qui était vrai de l'ancien système absolu Σ est vrai de n'importe quel système d'inertie : en conséquence si nous avons affaire à une source liée pendant tout le temps de transmission à un même système d'inertie, nous dirons qu'un récepteur lié au même système la voit sans aberration aucune, et qu'un récepteur animé dans ce système d'une vitesse v transversale la voit déplacée dans le sens de sa vitesse de l'angle d'aberration a donné par la formule relativiste [2].

---

[1] Si d'une étoile fixe E on pouvait observer la Terre, on la verrait constamment dans la position où elle se trouvait lors de l'émission du rayon actuellement reçu ; il y aurait donc un retard apparent des positions de la Terre sur son orbite, mais, en toute hypothèse, un retard à très peu près constant, et qui ne déformerait pas sensiblement la loi du mouvement orbital de la Terre.

[2] Il importe de noter que cette aberration réelle relativiste, qui ne dépend

Si au contraire la source a subi une accélération pendant la transmission, c'est-à-dire a changé pendant ce temps de système d'inertie, il y aura double aberration : aberration proprement dite à tout instant t du fait de la vitesse v du récepteur par rapport au système d'inertie où se trouvait la source lors de l'émission du rayon reçu à cet instant t ; aberration planétaire due au mouvement accéléré de la source sur sa trajectoire pendant la transmission.

Comme dans la théorie classique, d'ailleurs, la première de ces aberrations ne sera constatable que par deux observations successives entre lesquelles le récepteur aura lui-même changé de vitesse ; et la correction de la seconde ne sera possible que si l'on connaît par ailleurs la trajectoire de la source et la loi de son mouvement. Cela dit, revenons à nos problèmes concrets.

a') l'observateur terrestre, T, vise une étoile *fixe*, qui donc demeure liée au même système d'inertie pendant tout le temps de transmission : il y a pour lui à chaque instant aberration réelle due à sa vitesse absolue $w = u + v$, — vitesse qui est pour Einstein une vitesse relative à l'étoile — (1) ; et, d'une observation à une autre, aberration constatable due aux seules variations de v. C'est, au deuxième ordre près, le résultat classique, vérifié depuis longtemps en astronomie.

b') T observe le Soleil, fixe dans le système d'inertie solaire, où la Terre a sa vitesse propre v, vitesse relative au Soleil. A tout instant il y a simplement aberration réelle due à v, et d'une observation à l'autre aberration observable due aux variations de v.

c') T observe une planète, qui est à très peu près fixe dans le même système d'inertie pendant la transmission : il y a à tout instant aberration réelle due à la vitesse relative $v + v'$ de la Terre par rapport à ce système d'inertie, et, d'une observation à une autre, aberration observable due aux variations de $v + v'$. La trajectoire et le mouvement de la planète étant connus et permettant de déterminer $v + v'$, la correction d'aberration

---

que du mouvement *relatif* de la source et du récepteur, aurait lieu par exemple dans la visée de la Terre par un observateur stellaire, c'est-à-dire dans le cas d'une source mobile au sens absolu classique et d'un récepteur fixe.

(1) Le calcul de cette vitesse résultante devrait se faire, bien entendu, d'après les équations relativistes : notre formule $u + v$ indique l'opération à faire, et non le résultat ; même remarque pour les formules suivantes.

réelle fera passer d'un coup de la position apparente de la planète à sa position vraie, et cette unique correction équivaudra à la double correction classique ; avec cette différence toutefois qu'elle est rigoureusement exacte pour Einstein, tandis que pour les classiques la substitution d'une correction unique à la double correction n'était valable qu'au premier ordre. Quant à l'aberration observable, elle n'a pas d'intérêt dans le cas des planètes, en raison de leur réelle mobilité.

d') T observe une source terrestre : aucune aberration n'a lieu ; mais ce n'est plus, comme dans la théorie classique, par compensation : c'est simplement parce que source et récepteur sont fixes dans un même système d'inertie, autrement dit sont au repos relatif.

Pour obtenir le cas d'une source qui change de système d'inertie pendant la transmission, il faudrait supposer qu'une planète par exemple soit observée d'un point très éloigné, comme une étoile. Si d'une étoile située au pôle de l'Ecliptique on pouvait observer la Terre, on la verrait sans cesse — abstraction faite de l'aberration — en retard sur son orbite de l'arc parcouru par elle pendant la durée de transmission ; mais en supposant cette durée constante, la trajectoire circulaire et le mouvement uniforme, le retard serait indépendant de la position ; d'autre part l'aberration réelle changerait de direction au même rythme que la vitesse de la source, et serait constante en grandeur, les rayons reçus étant toujours perpendiculaires à la vitesse relative du récepteur et de la source ; la loi du mouvement paraîtrait donc inchangée, comme dans la théorie classique.

Au contraire si, avec les mêmes hypothèses, on observait la Terre d'une étoile située dans le plan de l'Ecliptique, la grandeur de l'aberration réelle dépendrait de la position de la Terre sur sa trajectoire, parce que la vitesse relative serait tantôt transversale, tantôt radiale et tantôt oblique ; si bien que le mouvement ne paraîtrait plus rigoureusement conforme à la loi des aires. Peut-être y aurait-il lieu de rechercher comment cette déformation spécifiquement relativiste de la loi du mouvement se présenterait dans l'observation de certaines étoiles doubles visuelles.

En tout cas, pour ce qui est des problèmes classiques nous pouvons dire que la théorie nouvelle de l'aberration rend compte

des résultats certains de l'observation tout aussi bien que la théorie ancienne, en ce sens du moins que les divergences entre les deux théories sont trop faibles pour faire actuellement l'objet d'un contrôle expérimental.

34. Théorie relativiste de l'expérience de Fizeau sur la vitesse de la lumière dans l'eau en mouvement : accord avec les mesures de Fizeau. — Fizeau, en déduisant d'un déplacement observable de franges d'interférences la vitesse relative à la Terre d'un rayon lumineux qui se propageait dans un tube rempli d'eau en mouvement, avait trouvé, aux erreurs de mesure près,

$$c' = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

n étant l'indice de l'eau, $\frac{c}{n}$ la vitesse de la lumière dans l'eau au repos, v la vitesse de l'eau dans la direction et le sens de propagation, et c' la vitesse cherchée.

Si la lumière avait été entraînée totalement par l'eau, on aurait trouvé $c' = \frac{c}{n} + v$; comme l'accroissement de vitesse dû à l'entraînement au lieu d'être v n'était que $v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ — quantité inférieure à v puisque n est plus grand que 1 — on disait qu'il y avait seulement *entraînement partiel* de la lumière par l'eau en mouvement, le coefficient d'entraînement étant $k = 1 - \frac{1}{n^2}$.

Ce coefficient avait été déduit par Fresnel de considérations mécaniques sur la différence des densités de l'éther dans l'eau et dans le vide [1]. Plus tard Lorentz en avait retrouvé l'équivalent, au second ordre près, en introduisant dans l'équation de propagation des ondes à l'intérieur du milieu mobile des termes

---

[1] En toute rigueur l'application de la formule de Fresnel au cas étudié par Fizeau aurait exigé que l'on fasse intervenir séparément dans le calcul du déplacement des franges la vitesse absolue de la Terre, w, et la vitesse absolue de l'eau, car les deux vitesses ne jouent pas dans le phénomène des rôles identiques. En fait Fizeau ne tint compte que de la vitesse relative de l'eau et de la Terre ; mais il n'introduisait ainsi dans les résultats que des modifications du second ordre en $\frac{w}{c}$, qui eussent été inaccessibles à ses mesures ; son calcul simplifié suffisait donc à l'interprétation de son expérience.

correspondant au mouvement absolu des électrons constitutifs de ce milieu : il obtenait ainsi en se référant à la Terre une vitesse globale de propagation dans l'eau en mouvement ; et c'est seulement sous la forme d'une différence entre cette vitesse globale et la vitesse de propagation dans l'eau au repos qu'il retrouvait, au premier ordre, l'accroissement $v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$, autrement dit le coefficient d'entraînement partiel de Fresnel-Fizeau.

Or, comme M. von Laue l'a montré le premier [1], la cinématique d'Einstein jointe au principe de relativité conduit immédiatement au résultat constaté par Fizeau et diversement interprété par Fresnel et par Lorentz.

Le principe de relativité permet de considérer l'eau en mouvement r. et u. par rapport à la Terre comme immobile dans un système d'inertie S ; dans ce système tout se passe comme dans l'ancien système absolu ; donc par rapport à S la vitesse de la lumière à travers l'eau dont l'indice est n doit être $c_n = \frac{c}{n}$. Il s'agit de trouver la vitesse de propagation relative à un système lié à la Terre, S′ ; par rapport à S′, le système S est animé, comme l'eau elle-même, d'une vitesse constante v, dans la direction et le sens du rayon qui se propage. La vitesse cherchée est donc la résultante d'une vitesse propre $\frac{c}{n}$, et de la vitesse relative v de S par rapport à S′. Faisons les suppositions habituelles sur les origines des temps et des espaces dans les deux systèmes, et appliquons la formule

$$u' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}};$$

nous devons remplacer dans cette formule u' par c', la vitesse cherchée ; u par $\frac{c}{n}$, la vitesse relative à S, et v par la vitesse de S par rapport à S′. Nous avons donc

$$c' = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{c}{n} \cdot \frac{v}{c^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}.$$

Pour rapprocher cette formule de la formule classique, mul-

(1) M. von Laue : *Die Mitführung des Lichtes durch bewegte Körper nach dem Relativitätsprinzip*. Annalen der Physik. IV. band 23, (1907), p. 989.

tiplions les deux termes de la fraction par $1 - \frac{v}{nc}$; nous obtenons

$$\frac{\left(\frac{c}{n} + v\right)\left(1 - \frac{v}{nc}\right)}{\left(1 + \frac{v}{nc}\right)\left(1 - \frac{v}{nc}\right)} = \frac{\frac{c}{n} + v - \frac{cv}{cn^2} - \frac{v^2}{nc}}{1 - \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{v}{c} \cdot \frac{v}{n}}{1 - \frac{v^2}{c^2} \cdot \frac{1}{n^2}}.$$

En négligeant au dénominateur le terme en $\frac{v^2}{c^2}$, on obtient l'expression :

$$c' = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{v^2}{cn},$$

qui ne diffère de la formule classique que par le terme $-\frac{v^2}{cn}$. Pour obtenir la différence relative entre cette évaluation de c' et l'évaluation classique, il faut diviser par c le terme $\frac{-v^2}{cn}$, ce qui donne une différence du second ordre seulement en $\frac{v}{c}$.

Doit-on dire qu'il y a entraînement partiel ou entraînement total ? Si u' est la vitesse résultante pour S′ d'un mobile M qui a dans S une vitesse propre u, tandis que S a par rapport à S′ une vitesse v, on a en cinématique classique $u' = u + v$ quand u et v ont même direction et même sens. Or dans ce cas il y a évidemment entraînement *total* de M par S relativement à S′ ; ceci se traduit par le fait que si l'on retranche de la vitesse résultante u' la vitesse propre u du mobile, on retrouve toute la vitesse d'entraînement v : $u' - u = v$. Au contraire dans l'expérience de Fizeau interprétée par les classiques il y a seulement entraînement partiel, parce que en retranchant, selon l'ancienne formule de composition, de la vitesse résultante c' la vitesse propre $\frac{c}{n}$, on n'obtient qu'une partie de la vitesse relative v des deux systèmes :

$$\frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{c}{n} = v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

Or si, nous conformant à la nouvelle formule de composition, nous « retranchons » de la vitesse résultante

$$c' = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{c}{n}\frac{v}{c^2}},$$

la vitesse propre $\frac{c}{n}$, nous retrouvons intégralement la vitesse d'entraînement v ; nous savons en effet (nº 25) que si

$$u' = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}, \qquad \frac{u' - u}{1 - \frac{uu'}{c^2}} = v.$$

Donc nous devons dire que selon la théorie relativiste il y a entraînement *total* de la lumière par les milieux transparents mobiles.

Article V

DYNAMIQUE DE LA RELATIVITÉ

35. Cinématique et Dynamique. — Toute dynamique implique une cinématique dont elle respecte les exigences. S'il doit y avoir une dynamique de la relativité, elle sera conforme aux formules de la cinématique relativiste. Mais, étant donnée une cinématique, peut-on déduire immédiatement la dynamique correspondante ? S'il en était ainsi et que nous découvrions quelque relation nécessaire ou simplement naturelle entre la dynamique classique et la cinématique classique, nous pourrions, en postulant l'existence d'une relation analogue entre la dynamique nouvelle et la cinématique nouvelle, passer de celle-ci à celle-là.

En fait il existe une relation très simple entre les deux parties de la mécanique classique : dans un même système d'inertie, les forces se composent suivant la même loi que les accélérations ; de sorte que lorsqu'un point de masse m est soumis simultanément à deux forces f_1 et f_2, qui séparément lui imprimeraient des accélérations $\gamma_1 = \frac{f_1}{m}$ et $\gamma_2 = \frac{f_2}{m}$, on peut aussi bien déterminer son accélération résultante γ_r en composant suivant la loi du parallélogramme les deux accélérations séparées, qu'en composant suivant la même loi les deux forces f_1 et f_2 et en divisant leur résultante f_r par la masse m du point ; ce qui permet d'énoncer sans restriction la loi $f = m\gamma$ pour le système d'inertie considéré. Comme par ailleurs les accélérations, les masses et les forces sont pour les classiques des grandeurs invariantes

par rapport à toute translation r. et u., la même loi subsiste dans tous les systèmes en mouvement r. et u. par rapport au premier, c'est-à-dire dans tous les systèmes d'inertie.

La question est moins simple du point de vue relativiste : d'abord les accélérations d'un même point ne sont plus les mêmes dans deux systèmes d'inertie S et S′. Ensuite la transformation des équations de Maxwell a montré que les forces d'origine é. m. qui agissent sur un même corps chargé ne sont pas non plus les mêmes suivant qu'on les considère d'un système où le corps est au repos ou d'un système où il a la vitesse v.

Il est vrai que si la transformation de ces forces quand on passe de S à S′ obéissait aux mêmes formules que la transformation des accélérations, de telle manière que le rapport $\frac{f}{\gamma}$ soit invariant, on pourrait dire que ce rapport invariant est la masse. Mais il n'en est pas ainsi : *les forces se transforment autrement que les accélérations*. On ne peut donc plus invoquer ici une loi invariante de composition des deux grandeurs, et il faut rattacher autrement la dynamique à la cinématique.

Un premier moyen est d'étendre aux forces mécaniques de toute espèce la transformation déduite des équations de Maxwell et des formules de Lorentz pour les forces du champ é. m., et de déduire de cette transformation généralisée des forces et de la transformation cinématique des accélérations l'expression de la masse. C'est la méthode suivie par Einstein dans son Mémoire de 1905. Einstein s'y justifie d'étendre aux forces mécaniques la transformation des forces é. m. par ce principe que si un point matériel se trouve en équilibre dans un système donné sous l'action combinée d'une force électrique f et d'une force mécanique $-f$, cet équilibre ne doit pas dépendre du choix du système ; et que par suite si la force électrique f se transforme d'une certaine façon quand on passe de S à S′, la force mécanique $-f$ doit se transformer d'une façon identique, sans quoi l'équilibre ne serait pas conservé.

Une autre méthode, plus satisfaisante peut-être parce qu'elle considère immédiatement les forces mécaniques, a été indiquée par P. Langevin, et perfectionnée ensuite : elle consiste à déduire l'expression nouvelle des forces et de la masse à partir du principe de relativité et de quelque autre principe général,

comme celui de la conservation de l'énergie ou de la quantité de mouvement. Faisons connaître pour le moment le raisonnement d'Einstein [1].

36. Déduction des formules fondamentales de la nouvelle dynamique à partir de la transformation des forces électromagnétiques. — Soit S un système d'inertie par rapport auquel un point matériel P a la vitesse v à l'instant t, v étant orientée suivant ox. D'après les conventions habituelles P est ainsi, à l'instant considéré, au repos dans le système S′ des formules de Lorentz. Or rien dans les postulats d'Einstein n'empêche d'admettre que la loi classique $f = m\gamma$ s'applique à cet instant dans le système S′ ; c'est-à-dire que, pour nous borner au plan des $x'y'$, si $f_{x'}$ et $f_{y'}$ sont les deux composantes parallèles aux axes de la force appliquée au point matériel ; si $\gamma_{x'}$ et $\gamma_{y'}$ sont les deux composantes de l'accélération du point, et si m est la masse du point dans le système S′, on a

$$f_{x'} = m\gamma_{x'} \quad (1') \qquad \text{et} \qquad f_{y'} = m\gamma_{y'} \quad (2').$$

Telles sont les équations du mouvement du point dans S′. Quelles sont les équations de son mouvement relativement à S ? La solution consistera en deux équations où entreront les composantes γ_x et γ_y de l'accélération du point par rapport à S, les composantes f_x et f_y de la force appliquée au point, évaluée du point de vue de S, et la masse du point. Pour établir ces équations à partir des équations (1′) et (2′) relatives à S′, nous allons exprimer, d'après la cinématique nouvelle, les accélérations du point dans S′ en fonction de ses accélérations dans S ; puis, d'après les formules de correspondance déduites de l'E. M., les composantes de la force pour S′ en fonction des compcsantes de la force pour S ; après quoi nous remplacerons dans les équations (1′) et (2′) les accélérations et les forces relatives à S′ par leurs valeurs en fonction des grandeurs correspondantes relatives à S.

La cinématique nous dit que si l'accélération d'un point suivant ox dans le système S où il a une vitesse v est γ_x, son accélération dans S′ suivant ox' est $\gamma_{x'} = \frac{\gamma_x}{\alpha^3}$. L'E. M. nous dit que si

[1] A. Einstein : *Sur l'Electrodynamique des corps en mouvement*, II, 10, éd. Solovine, p. 42 et suiv.

la force électrique dans S suivant ox est f_x, la force électrique dans S′ suivant $o'x'$ a la même valeur, $f_{x'} = f_x$, et nous postulons avec Einstein que cette dernière relation vaut pour toute espèce de force. Remplaçant dans l'équation (1′) $\gamma_{x'}$ et $f_{x'}$ par ces valeurs, nous obtenons

$$(1) \qquad f_x = m\frac{\gamma_x}{\alpha^3} :$$

c'est la loi du mouvement du point dans le système S suivant ox. D'après cette équation $\frac{m}{\alpha^3}$ est le quotient de la force f_x par l'accélération γ_x relative au système S où le point a dans la direction ox la vitesse v : il faut en conclure que $\frac{m}{\alpha^3}$ représente la résistance d'inertie que le point matériel oppose dans un système où il a la vitesse v à une force qui agit sur lui parallèlement à cette vitesse.

Faisons les mêmes opérations sur $\gamma_{y'}$ et $f_{y'}$: nous avons d'après la cinématique $\gamma_{y'} = \frac{\gamma_y}{\alpha^2}$ et d'après l'E. M. $f_{y'} = \frac{f_y}{\alpha}$; portant ces valeurs dans (2′), nous obtenons

$$(2) \qquad \frac{f_y}{\alpha} = m\frac{\gamma_y}{\alpha^2}, \qquad \text{ou} \qquad f_y = \frac{m\gamma_y}{\alpha} :$$

c'est la loi du mouvement du point dans S suivant oy. La résistance d'inertie que le point oppose, dans le système S où il a la vitesse v, à une force perpendiculaire à cette vitesse est $\frac{m}{\alpha}$, car c'est là le quotient de f_y par γ_y.

Pour indiquer que m est la masse du point relativement à un système où il est au repos — pour nous, le système S′ — on appelle cette masse *masse au repos*, et on la désigne par m_0 au lieu de m.

Comme les formules pour la direction oz sont les mêmes que pour la direction oy, on voit qu'en définitive les équations classiques du mouvement d'un point soumis à une force :

$$f_x = m\gamma_x, \qquad f_y = m\gamma_y \qquad \text{et} \qquad f_z = m\gamma_z,$$

se trouvent remplacées dans la nouvelle dynamique par les trois formules

$$f_x = \frac{m_0}{\alpha^3}\gamma_x ; \qquad f_y = \frac{m_0}{\alpha}\gamma_y \qquad \text{et} \qquad f_z = \frac{m_0}{\alpha}\gamma_z,$$

α représentant le facteur $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, où v est la vitesse du point supposée dirigée suivant l'axe ox du système de référence.

37. Les deux aspects de la masse relativiste. Sa dépendance par rapport à la vitesse. — Dans la formule classique $f = m\gamma$, m mesure la résistance d'inertie qu'un point oppose à la force qui tend à faire varier sa vitesse ; c'est sa masse au sens ordinaire ; elle est constante et toujours égale au quotient de la force par l'accélération. Si l'on veut conserver au mot masse cette signification en dynamique relativiste, on est conduit à dire que la masse d'un point matériel n'est plus unique, ni constante, en ce sens que par rapport à un système où le point a une vitesse non nulle elle diffère suivant la grandeur de cette vitesse et aussi suivant l'angle que fait avec cette vitesse la direction de la force.

On a appelé *masse longitudinale*, m_l, la résistance d'inertie du point à l'action d'une force parallèle à sa vitesse, et masse *transversale*, m_t, sa résistance à l'action d'une force perpendiculaire à sa vitesse. D'après les équations (1) et (2), on a

$$m_l = \frac{m_0}{\alpha^3} \qquad \text{et} \qquad m_t = \frac{m_0}{\alpha}.$$

Mais dans la dynamique classique la masse se présentait autrement encore que comme la résistance d'un corps à l'action d'une force. Supposons toujours qu'on rapporte le mouvement d'un point matériel à trois axes rectangulaires ox, oy, oz ; l'accélération du point, comme d'ailleurs sa vitesse, et la force qui lui est appliquée, sont des grandeurs vectorielles qui s'expriment par leurs composantes parallèles aux axes, et la relation $f = m\gamma$ devient alors en notation différentielle :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = f_x, \qquad m\frac{d^2y}{dt^2} = f_y, \qquad \text{et} \qquad m\frac{d^2z}{dt^2} = f_z.$$

Considérons en particulier l'une de ces équations, la première par exemple. Nous pouvons l'écrire

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = f_x,$$

car l'accélération est la dérivée par rapport au temps de la vitesse $\frac{dx}{dt}$.

Mais étant donné que la masse est pour les classiques une constante, indépendante de la vitesse du point matériel et donc de l'instant où on la considère, nous pouvons écrire aussi

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = f_x,$$

ou enfin, comme $\frac{dx}{dt}$ est la vitesse v_x du point suivant ox,

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = f_x\,;$$

on aurait de même

$$\frac{d}{dt}(mv_y) = f_y \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt}(mv_z) = f_z.$$

Ces formules, qui sont simplement déduites de la relation $f = m\gamma$, mettent en évidence une relation entre la force f et la variation due à l'action de la force du produit $m\vec{v}$, qu'on appelle la quantité de mouvement, ou l'impulsion, du point matériel animé de la vitesse v. La force nous apparaît ici comme la cause productrice non plus d'une accélération du point, mais d'une variation de sa quantité de mouvement.

Pouvons-nous établir dans la nouvelle dynamique des relations analogues à celles que nous venons d'obtenir ?

Nous savons déjà que

$$\frac{m_0}{\alpha^3}\frac{d^2x}{dt^2} = f_x\,; \qquad \frac{m_0}{\alpha}\frac{d^2y}{dt^2} = f_y \qquad \text{et} \qquad \frac{m_0}{\alpha}\frac{d^2z}{dt^2} = f_z.$$

Pouvons-nous écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha^3}\frac{dx}{dt}\right) = f_x\,; \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dy}{dt}\right) = f_y\,; \ \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dz}{dt}\right) = f_z\,;$$

ce qui nous permettrait de dire que la masse longitudinale et la masse transversale représentent non pas seulement le rapport de la force à l'accélération, mais encore le rapport de la quantité de mouvement à la vitesse ?

Ce n'est pas sûr *a priori*, parce que $\frac{m_0}{\alpha^3}$ et $\frac{m_0}{\alpha}$ ne sont plus des constantes ; ce sont des grandeurs qui dépendent de v, par conséquent de t, et qu'on ne peut introduire telles quelles sous le signe de la dérivation. Pour retrouver l'équivalent des relations classiques concernant la variation de la quantité de mouvement,

il faudra peut-être joindre à la vitesse une masse comme facteur de quantité de mouvement — comme *capacité d'impulsion* — qui diffère de la masse comme coefficient d'inertie.

Appelons μ cette masse inconnue et qui pourra dépendre de la vitesse autrement que la masse d'inertie longitudinale ou transversale. Nous pouvons déterminer cette masse μ par cette condition qu'elle doit jouer le même rôle que la masse classique dans la relation

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = f_x$$

et les deux autres. Nous devons donc avoir

$$\frac{d}{dt}\left(\mu_x\frac{dx}{dt}\right) = f_x,$$

ou, d'après l'équation $\frac{m_0}{\alpha^3}\frac{d^2x}{dt^2} = f_x$,

$$\frac{d}{dt}\left(\mu_x\frac{dx}{dt}\right) = \frac{m_0}{\alpha^3}\frac{d^2x}{dt^2};$$

et, suivant oy et oz,

$$\frac{d}{dt}\left(\mu_y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{m_0}{\alpha}\frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt}\left(\mu_z\frac{dz}{dt}\right) = \frac{m_0}{\alpha}\frac{d^2z}{dt^2}.$$

On voit immédiatement que suivant oy la masse transversale $\frac{m_0}{\alpha}$ vérifie la condition cherchée : en effet on a

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\right)\frac{dy}{dt} + \frac{m_0}{\alpha}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$

ou, comme $\frac{dy}{dt}$ est nul,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{m_0}{\alpha}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Il en est de même suivant oz. En ce qui concerne la direction ox, suivant laquelle la vitesse $\frac{dx}{dt}$ n'est pas nulle, on ne peut conserver la masse $\frac{m_0}{\alpha^3}$; mais on vérifie aisément que la valeur $\frac{m_0}{\alpha}$ répond à la condition posée.

Ainsi μ doit être égal dans les trois cas à $\frac{m_0}{\alpha}$; c'est-à-dire que suivant ox, ou plutôt parallèlement à la vitesse du point matériel, la masse comme facteur de quantité de mouvement est diffé-

rente de la masse comme coefficient d'inertie, tandis que suivant les directions perpendiculaires à la vitesse les deux espèces de masses ont la même valeur.

En conséquence, dans la nouvelle dynamique, la masse comme facteur de quantité de mouvement, ou comme on l'appelle encore la *masse maupertuisienne*, dépend de la grandeur de la vitesse du point matériel, mais pas de sa direction.

Les nouvelles relations qui lient la force aux variations de la quantité de mouvement,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dx}{dt}\right) = f_x; \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dy}{dt}\right) = f_y, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dz}{dt}\right) = f_z,$$

étant les mêmes pour les trois axes, peuvent être remplacées par la relation unique

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\vec{v}\right) = \vec{F},$$

où $\vec{F}$ est la force totale appliquée au point et où $\vec{v}$ représente en grandeur et en direction la vitesse résultante du point dans le système de référence adopté, quelle que soit son orientation par rapport aux axes. Si l'on désigne par m_v la masse maupertuisienne d'une particule animée de la vitesse v, on a toujours

$$m_v = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad \text{ou} \qquad m_v = \frac{m_0}{\alpha}.$$

38. L'inertie de l'énergie. — Nous avons considéré dans ce qui précède la force comme cause d'accélération, puis comme cause de variation de la quantité de mouvement. En mécanique classique la force se présente encore sous un autre aspect : si par son action elle déplace d'une certaine longueur le point auquel elle est appliquée, elle apparaît comme un *facteur du travail* effectué, c'est-à-dire du produit de la grandeur de la force par le déplacement du point, compté suivant la direction de cette force. Si f est la force, e le déplacement et W le travail, on a $W = fe$.

Mais à supposer la force constante et le déplacement effectué suivant sa direction, on a, si m est la masse du point déplacé,

$$W = fe = m\gamma e,$$

puisque $f = m\gamma$; ou encore

$$W = m\gamma \cdot \frac{1}{2} \gamma t^2,$$

car le déplacement dû à l'action de la force est

$$\frac{1}{2} \gamma t^2 ;$$

or

$$\gamma t = v, \qquad \text{et} \qquad \gamma^2 t^2 = v^2, \qquad \text{d'où} \qquad W = fe = \frac{1}{2} mv^2.$$

mv^2 s'appelle la force-vive du point quand sa vitesse est v ; et $\frac{1}{2} mv^2$ sa demi force-vive ou son énergie cinétique.

Soit un point de masse m soumis pendant un intervalle de temps dt à des forces quelconques et soit dW le travail de la résultante de ces forces pendant cet intervalle : on établit aisément que la différentielle de la demi force-vive, $d\left(\frac{mv^2}{2}\right)$, est égale au travail élémentaire dW ; et que pendant l'intervalle de temps fini $t - t_0$ la variation $\frac{mv^2 - mv_0^2}{2}$ de la demi force-vive du point est égale au travail total W accompli par les forces sur le point.

Pour établir cette relation entre la demi force-vive et le travail *en mécanique classique* on peut partir des équations relatives à la quantité de mouvement, c'est-à-dire, pour nous borner au plan des xy,

$$\frac{d}{dt}\left(m \frac{dx}{dt}\right) = f_x \qquad \text{et} \qquad \frac{d}{dt}\left(m \frac{dy}{dt}\right) = f_y.$$

Multiplions la première équation par $\frac{dx}{dt}$ et la seconde par $\frac{dy}{dt}$, et additionnons : nous obtenons

$$\frac{dx}{dt} \frac{d}{dt}\left(m \frac{dx}{dt}\right) + \frac{dy}{dt} \frac{d}{dt}\left(m \frac{dy}{dt}\right) = f_x \frac{dx}{dt} + f_y \frac{dy}{dt} = \frac{dW}{dt},$$

d'après la définition même du travail ; ou

$$m\left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2}\right) = \frac{dW}{dt} ;$$

ou encore, en remarquant que $\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$ est la dérivée par rapport à t de

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2, \qquad \frac{m}{2} \frac{d}{dt}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = \frac{dW}{dt} ;$$

mais

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$$

est le carré v^2 de la vitesse du point ; d'où enfin

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{dW}{dt};$$

et, en intégrant, $\frac{mv^2}{2} = W +$ constante ; W étant le travail total fourni au point par la résultante des forces f_x et f_y.

Considérons le travail, ou l'énergie, W, qu'on a dû dépenser pour faire passer m de la vitesse v_0 à la vitesse v ; nous avons

$$\frac{1}{2}(mv^2 - mv_0^2) = W;$$

la variation de la demi force-vive est égale à l'énergie reçue par la masse.

Nous pouvons chercher à établir une relation analogue en dynamique relativiste [1] ; mais ici encore la variabilité de la masse change les résultats. Si l'on effectue à partir des équations

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dx}{dt}\right) = f_x \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\alpha}\frac{dy}{dt}\right) = f_y,$$

les mêmes opérations que nous venons de faire sur les équations classiques

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{dx}{dt}\right) = f_x \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\left(m\frac{dy}{dt}\right) = f_y,$$

on aboutit à la relation

$$\frac{d}{dt}(mc^2) = \frac{dW}{dt},$$

au lieu de

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{dW}{dt};$$

m représentant dans cette relation la masse du point animé de la vitesse v, c'est-à-dire

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

---

[1] Pour les calculs, voir J. Becquerel : *Le Principe de Relativité et la théorie de la gravitation*, p. 102.

On tire de là, en intégrant, $mc^2 = W +$ constante ; au lieu de $\frac{mv^2}{2} = W +$ constante.

Evidemment les constantes ne sont pas égales dans les deux expressions, puisque les premiers membres peuvent être très différents.

Pour obtenir la demi force-vive relativiste, considérons le travail W grâce auquel on a fait passer le point matériel de la vitesse 0 à la vitesse v, et de la masse m_0 à la masse

$$m_v = \frac{m_0}{\alpha} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Nous avons $(m - m_0)\, c^2 = W$, ou

$$m_0 c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right) = W.$$

Transformons cette expression, en remarquant que $\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ est égal approximativement à $1 + \frac{\beta^2}{2}$. Ceci nous donne

$$m_0 c^2\left(1 + \frac{\beta^2}{2} - 1\right) = W; \qquad \text{ou} \qquad m_0 c^2\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2}\right) = W;$$

ou enfin $\frac{1}{2} m_0 v^2 = W$: la demi force-vive est à très peu près la même que la demi force-vive classique.

La relation $(m - m_0)\, c^2 = W$ nous apprend non seulement qu'à un apport d'énergie égal à W répond dans le point matériel un accroissement de demi force-vive égal à peu près à $\frac{1}{2} m_0 v^2$; mais que cet apport d'énergie a produit un *accroissement de masse* $m - m_0$, qui lui est proportionnel, le facteur de proportionnalité étant c^2.

D'autres calculs concernant les échanges d'énergie rayonnante et l'équilibre des charges élémentaires de l'électron montrent 1° qu'une *énergie rayonnante* W, dont la vitesse est c, a une masse maupertuisienne égale à $\frac{W}{c^2}$, et une quantité de mouvement égale à $\left(\frac{W}{c^2}\right) c = \frac{W}{c}$.

2° Qu'un corps qui rayonne ou absorbe une énergie W perd ou gagne une masse égale à $\frac{W}{c^2}$.

3° Qu'un électron au repos dont la masse est μ_0 a une énergie totale — (énergie potentielle du champ électrostatique créé par l'électron plus énergie potentielle correspondant à la force qui empêche les charges de l'électron de se disperser par répulsion) — égale à $\mu_0 c^2$.

Tous ces résultats, dont le premier invite à annuler la constante arbitraire de l'équation $mc^2 = W +$ constante, conduisent à dire d'abord que toute variation d'énergie d'un système matériel s'accompagne d'une variation de masse dm égale à $\frac{dW}{c^2}$, quelle que soit la forme de l'énergie considérée ; ensuite que toute masse m contient une énergie totale $W = mc^2$, et qu'inversement toute énergie W a une masse maupertuisienne $m = \frac{W}{c^2}$ (1).

C'est l'ensemble de ces propositions qu'on résume en parlant de l'*inertie de l'énergie*. Supposons un système matériel isolé : ses éléments échangent entre eux de l'énergie, et leurs masses varient avec leur état de mouvement ; mais l'énergie globale du système ne varie pas, puisqu'il est isolé : sa masse globale ne varie pas non plus. Autrement dit la conservation de la masse et la conservation de l'énergie ne sont plus deux thèses indépendantes ; elles sont deux aspects d'un même principe de conservation, celui de la conservation de la masse-énergie. On peut encore considérer les éléments du système comme des individus, définis chacun par son rôle dans les relations intérieures au système ; mais on ne peut plus les caractériser par leur masse (2).

39. Passage de la nouvelle cinématique à la nouvelle dynamique par des considérations purement mécaniques. — Nous avons montré comment la dynamique de la relativité pouvait s'établir à partir de la nouvelle cinématique, mais par l'intermédiaire de l'E. M. Nous voudrions indiquer ici comment des considérations d'ordre

(1) A. Einstein : *Sur l'Electrodynamique des corps en mouvement*, éd. Solovine. *L'Inertie d'un corps dépend-elle de sa capacité d'énergie ?* p. 49-53.

(2) Paul Langevin a montré que la relation $E = mc^2$ entre l'énergie et la masse résultait déjà de la théorie semi-relativiste de Poincaré sur l'équilibre de l'électron de Lorentz, considéré comme un système de charges élémentaires. Voir P. Langevin : *L'inertie de l'énergie et ses conséquences.* Journal de Physique, 1913, p. 575.

On trouvera dans cet article l'historique, en même temps qu'un ample exposé, de la question.

exclusivement mécanique permettent de passer de la nouvelle cinématique à la nouvelle dynamique (¹).

La déduction repose sur les deux notions d'impulsion et d'énergie, et sur un postulat concernant leur invariance dans certaines conditions.

D'après la dynamique classique, la quantité de mouvement ou l'impulsion relative à un système d'inertie donné d'un point matériel de masse m et de vitesse v est une grandeur vectorielle : $\vec{i} = m\vec{v}$; l'énergie cinétique du même point est une grandeur scalaire : $e = \frac{1}{2} mv^2$. Quand il s'agit d'un système matériel formé de plusieurs masses, l'impulsion $\vec{I}$ est égale à la somme des impulsions $\Sigma m\vec{v}$, et l'énergie cinétique E à la somme des énergies, $\Sigma \frac{mv^2}{2}$.

Si aucune force extérieure n'agit sur le système, $\vec{I}$ demeure constant : c'est le théorème de la conservation de la quantité de mouvement ; vrai relativement à un système d'inertie, ce théorème est vrai aussi pour tous les autres.

Bien qu'aucune force extérieure n'agisse sur le système matériel, E au contraire peut varier, sa variation étant égale au travail des forces intérieures ; mais si au lieu de considérer la seule énergie cinétique E, on considère *l'énergie totale U*, qui est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle — toujours définissable dans certaines conditions — cette énergie totale demeure constante aussi en l'absence de forces extérieures, et cela pour tous les systèmes également.

$\vec{I}$ et U, dans le cas d'un système matériel isolé, sont donc deux grandeurs qui se conservent au cours du temps et dont la conservation est une propriété invariante.

S'inspirant de ces données classiques, on est invité à postuler que *du point de vue relativiste* aussi il existe pour un système matériel en mouvement deux grandeurs caractéristiques, son impulsion et son énergie, et que l'ensemble de ces deux grandeurs, sinon chacune d'elles considérée séparément, se conserve, quand

(¹) Voir V. Lalan : *Sur une définition axiomatique de l'impulsion et de l'énergie*, C. R. de l'A. des Sc. 26 mars 1934, t. CXCVIII, p. 1211. L'auteur rattache sa déduction à une idée exprimée antérieurement par M. P. Langevin.

le système matériel est isolé, quel que soit le système de référence adopté.

Une condition nécessaire de cette invariance de la conservation est l'invariance de l'ensemble des deux grandeurs elles-mêmes ; on admettra cette invariance, avec ce corollaire immédiat que si deux systèmes matériels isolés ont à la fois même impulsion et même énergie totale relativement à un système d'inertie S, ils ont aussi même impulsion et même énergie totale relativement à tout autre système de référence S′ en translation r. et u. par rapport au premier.

Que sait-on *a priori* de la forme des deux grandeurs en question ? Que l'impulsion qui est une grandeur vectorielle peut dépendre à la fois *de la grandeur et de la direction de la vitesse*, ainsi que de la masse ; et que l'énergie totale qui est comme l'énergie cinétique une grandeur scalaire ne peut dépendre que de la masse et de la *grandeur* de la vitesse. Mais la masse elle-même pourrait dépendre de la vitesse : alors il est nécessaire d'attribuer à chaque point matériel une masse au repos, m_0, invariable comme telle.

Cela étant, on a deux fonctions de v^2 à trouver, l'une $g(v^2)$, qui déterminera

$$\overrightarrow{\mathrm{I}} = m_0 g(v^2) \overrightarrow{v} \;;$$

l'autre $f(v^2)$ qui déterminera

$$\mathrm{U} = m_0 f(v^2).$$

Ce sont les deux postulats de la constance de la masse au repos et de l'invariance de l'impulsion-énergie qui, joints à la formule relativiste de l'addition des vitesses et au principe de relativité, permettent de résoudre le problème, et de découvrir la loi de variation de la masse — comme facteur de quantité de mouvement — avec la vitesse, et la relation de cette masse avec l'énergie totale. La considération, dans deux systèmes de référence S et S′ dont la vitesse relative est u, de deux systèmes matériels très simples — réduits le premier à deux masses égales animées de vitesses opposées *parallèlement* à la vitesse u ; le second à deux masses égales — et égales aux masses du premier système — animées de vitesses opposées *perpendiculairement* à la vitesse u — permet en effet de déduire des postulats admis une forme nécessaire des deux fonctions g et f.

Pour g on trouve

$$g(v^2) = \frac{K}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{ou} \quad \frac{K}{\alpha};$$

et pour

$$f(v^2) = \frac{H}{\alpha} + H_1;$$

K, H et H_1 étant des constantes.

Voilà ce qu'on peut déduire de la comparaison de deux systèmes matériels dont les masses sont égales ; pour aller plus loin il faut considérer deux systèmes de masses différentes et postuler, malgré la différence des masses, le maintien de l'égalité de leur impulsion-énergie dans tous les systèmes d'inertie ; alors on trouve que la constante H_1, qui s'ajoutait à l'expression de l'énergie totale, doit être nulle. D'où ces deux formules : pour l'impulsion

$$\vec{I} = K \frac{m_0}{\alpha} \vec{v};$$

et pour l'énergie totale

$$U = \frac{Hm_0}{\alpha}.$$

Les deux constantes K et H ne dépendent que du choix des unités : K a les dimensions d'un nombre, comme $\frac{I}{mv}$; si l'on choisit les unités de façon que $K = 1$, on a $\vec{I} = \frac{m_0 \vec{v}}{\alpha}$. H a les dimensions du carré d'une vitesse, comme $\frac{U}{m}$; si les unités sont telles que $H = c^2$, on a

$$U = \frac{m_0 c^2}{\alpha} = mc^2 :$$

ce sont là les formules données plus haut de l'impulsion et de l'énergie relativistes.

Quant à la force il suffit de la considérer comme la cause de la variation de l'impulsion dans le cas d'une particule isolée, et comme égale à $\frac{d\vec{I}}{dt}$, pour retrouver la loi

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{v}}{\alpha}\right).$$

Il convient d'ajouter que la formule classique d'addition des vitesses jointe aux postulats énoncés ne conduit pas à l'annulation

de la constante H_1. Ceci correspond au fait que l'énergie classique ne peut se définir qu'à une constante près, à l'encontre de l'énergie relativiste qui se définit d'une façon absolue.

40. Explication dynamique de l'existence d'une vitesse limite des masses. — Quand une force agit sur un corps dans la direction de sa vitesse, elle est indépendante de la grandeur de cette vitesse. Par rapport à un système de référence où le corps avait étant au repos une masse m_0, il acquiert une vitesse de plus en plus grande, et quand cette vitesse a la valeur v la masse longitudinale du corps a la valeur $\frac{m_0}{\alpha^3}$, où $\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Plus v est grand plus cette masse est grande, c'est-à-dire que *le corps oppose à l'action de la force une résistance d'inertie croissante à mesure que cette force fait croître sa vitesse.*

Si v s'approche de la vitesse de la lumière, le facteur α^3 qui figure au dénominateur de l'expression de la masse tend vers 0 ; la masse croît au delà de toute grandeur donnée, et l'accélération tend aussi vers 0. Il y a donc là comme une limitation automatique imposée à l'accroissement de vitesse d'un corps soumis à une force longitudinale, et la vitesse limite — d'ailleurs inaccessible — que le corps peut acquérir est précisément la vitesse de la lumière, c. La cinématique d'Einstein excluait déjà toute vitesse relative de deux mobiles ou de deux systèmes de référence égale ou supérieure à la vitesse de la lumière (N° 26) ; cette exclusion reçoit ici son explication dynamique.

41. La dynamique nouvelle et l'expérience. — Nous avons vu que les modifications des durées, des longueurs et des vitesses introduites par la cinématique de la relativité étaient très faibles, et par suite inaccessibles à nos mesures directes, en raison de la petitesse des vitesses relatives des systèmes de référence ou des masses usuelles par rapport à la vitesse de la lumière ; la même remarque générale vaut pour la dynamique. L'accord de la dynamique relativiste avec l'expérience consistera donc avant tout dans sa conformité en première approximation avec la dynamique classique, du moins dans tous les cas où les vitesses des corps mus par les forces seront petites par rapport à c ; cette conformité approximative est incontestable en ce sens que les écarts prévus

— lesquels sont du second ordre en $\frac{v}{c}$ ou plus petits encore — échappent absolument à nos mesures dans les cas usuels.

Mais quand v devient une fraction importante de c, la différence s'accuse entre les résultats prévus par les deux dynamiques, et les écarts peuvent devenir observables.

Les électrons qui constituent les rayons cathodiques peuvent être projetés à des vitesses de plus de 100.000 kilomètres par seconde, plus du tiers de celle de la lumière ; et les électrons qui constituent les rayons β des corps radio-actifs peuvent atteindre des vitesses de plus de 290.000 kilomètres par seconde ; aussi a-t-on cherché à vérifier les formules relativistes de la variation de la masse en étudiant le mouvement de ces électrons très rapides. Indiquons seulement le principe de la vérification.

Un électron de vitesse v soumis à un champ *électrique* uniforme subit une déviation qui fait de sa trajectoire une parabole analogue à la trajectoire d'un projectile sous l'action de la pesanteur ; un électron de vitesse v soumis à un champ *magnétique* uniforme subit une déviation qui fait de sa trajectoire une circonférence — ou une hélice tracée sur un cylindre. Ces déviations dépendent à la fois de la vitesse initiale v des électrons, des forces qu'ils subissent de la part du champ, et du rapport $\frac{e}{m}$ de leur charge invariable à leur masse supposée dépendante de leur vitesse. On réalisera donc des expériences où des faisceaux d'électrons animés successivement de vitesses initiales différentes sont diversement déviés sous l'action des mêmes champs ; et de la comparaison des déviations on déduira les variations en fonction de la vitesse du rapport $\frac{e}{m}$, ce qui équivaut à déduire les variations de la masse elle-même, puisque e est constant : c'est là le procédé le plus simple ; mais il y en a d'autres. En tout cas les mesures les plus précises, celles de Bücherer en 1909 et celles de Guye et Lavanchy en 1916, ont montré, aux erreurs d'expérience près, l'exactitude des formules relativistes de la variation de la masse pour toute une suite de vitesses s'échelonnant entre le tiers et la moitié de la vitesse de la lumière [1].

---

[1] Guye Ch. Eug.... : *Vérification expérimentale de la formule de Lorentz-Einstein.* Mémoires de la Société de Physique et d'Histoire naturelle de Genève. Vol. 39, fasc. 6 (1921), p. 352-354.

Une autre vérification — négative — de la théorie consiste dans ce fait qu'on n'a jamais observé aucune vitesse d'une particule matérielle par rapport à une autre qui dépasse ni même qui égale la vitesse de la lumière. Les vitesses relatives les plus grandes que nous connaissions sont celles des rayons β ; or si les corpuscules β ont souvent des vitesses supérieures à 290.000 kilomètres, jamais ils n'atteignent la vitesse limite de 300.000 kilomètres par seconde.

Signalons encore une conséquence de l'inertie de l'énergie qui, pour n'être pas susceptible d'une vérification précise, n'en est pas moins en faveur de la théorie : on sait depuis longtemps que beaucoup de poids atomiques sont à très peu près des multiples entiers du plus petit d'entre eux pris pour unité, le poids atomique de l'hydrogène. Un hypothèse séduisante, formulée par Prout dès 1815, est que les atomes des corps « simples » sont tous des assemblages d'atomes d'hydrogène ; mais de cette hypothèse semble résulter ce corollaire que tous les poids atomiques devraient être exactement des nombres entiers ; or ce corollaire est contredit pour beaucoup d'éléments par des écarts les uns très petits les autres considérables. Une première explication des écarts de toute grandeur a été fournie par la découverte des *isotopes*, c'est-à-dire du fait que des corps considérés d'abord comme simples étaient en réalité des mélanges de corps de mêmes propriétés chimiques, mais de poids atomiques différents. Cependant cette explication laisse encore subsister dans beaucoup de cas de faibles différences entre les poids atomiques rapportés à celui de l'hydrogène et les nombres entiers. Avant la découverte des isotopes, en 1913, P. Langevin avait proposé comme explication générale des écarts à la loi de Prout la relation entre les variations de la masse et celles de l'énergie (1) : quand des atomes lourds se forment à partir d'atomes plus légers, ils peuvent absorber ou émettre de l'énergie, donc gagner ou perdre de la masse, ce qui empêche un assemblage d'avoir une masse rigoureusement égale à la somme des masses primitives de ses éléments (2).

---

(1) P. Langevin : *L'inertie de l'énergie et ses consequences.* Journal de Physique, 1913, p. 585-590.

(2) Il importe d'observer que, les masses atomiques étant supposées mesurées à la balance, l'hypothèse de Langevin impliquait que la masse *pesante* d'une particule obéit aux mêmes lois de variation que sa masse *inerte*. Ceci

Le principe de cette explication est utilisé aujourd'hui pour rendre compte des différences entre les multiples exacts du poids atomique de l'hydrogène et les poids atomiques des isotopes eux-mêmes.

---

ne résulte pas de la dynamique de la relativité ; mais Langevin déduisait du résultat négatif des expériences d'Eotvös sur le rapport des deux masses — expériences dont nous parlerons plus loin (nº 71) — que la constance de l'égalité des deux masses pouvait être considérée comme un fait d'expérience.

TABLE DES MATIÈRES

Principes de la théorie restreinte

		Pages
Art. 2.	— Négation du privilège de l'éther, nos 13-18	II-1
Art. 3.	— Transformation de Lorentz et cinématique de la relativité, nos 19-29	II-8
Art. 4.	— Théorie relativiste de l'E. M. et de l'Optique des corps en mouvement relatif, nos 30-34	II-43
Art. 5.	— Dynamique de la relativité, nos 35-41	II-65

ERRATUM

Page 64 (II-16), *avant-dernière ligne, au lieu de* : sont respectivement ... *lire* : sont, à chacun des instants de S, respectivement ...

Page 126 (II-78), l. 3, *au lieu de* : Une condition nécessaire, *lire* : Une condition suffisante ...

Saint-Amand (Cher), France. — Imprimerie R. Bussière. — 6-3-1937.

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

PUBLIÉES SOUS LA DIRECTION DE MM.

J. PERRIN
Membre de l'Institut
Prix Nobel de Physique
Professeur à la Faculté des Sciences
de Paris
ATOMISTIQUE

Marcel PRENANT
Professeur à la Sorbonne
I. — BIOLOGIE ÉCOLOGIQUE
II. — LEÇONS DE ZOOLOGIE

A. REY
Professeur à la Sorbonne
HISTOIRE DES SCIENCES

Y. ROCARD
Maître de Recherches
THÉORIES MÉCANIQUES
(Hydrodynamique-Acoustique)

R. SOUÈGES
Chef de Travaux
à la Faculté de Pharmacie
EMBRYOLOGIE
ET MORPHOLOGIE VÉGÉTALES

TAKAGI
Professeur à l'Université Impériale de Tokyo
MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

TAMIYA-(HIROSHI)
Membre du Tokugawa Biologisches
Institut-Tokyo
BIOLOGIE (Physiologie cellulaire)

A. TCHITCHIBABINE
Membre de l'Académie des Sciences
de l'U. R. S. S.
CHIMIE ORGANIQUE
(Série hétérocyclique)

Georges TEISSIER
Sous-directeur de la Station
Biologique de Roscoff
BIOMÉTRIE
ET STATISTIQUE BIOLOGIQUE

G. URBAIN
Membre de l'Institut
Professeur à la Faculté des Sciences de Paris
THÉORIES CHIMIQUES

Pierre URBAIN
Maître de Conférences à l'Institut
d'Hydrologie et de Climatologie de Paris
GÉOCHIMIE

Y. VERLAINE
Professeur à l'Université de Liége
PSYCHOLOGIE ANIMALE

P. WEISS
Membre de l'Institut
Directeur de l'Institut de Physique
de l'Université de Strasbourg
MAGNÉTISME

R. WURMSER
Directeur du Laboratoire de Biophysique
de l'École des Hautes-Études
BIOPHYSIQUE

Actualités Scientifiques et Industrielles

Série 1937 *(suite)* :

466. LÉON BINET et GEORGES WELLER. Le glutathion.... 20 fr.
467. GEORGES MATISSE. La question de la finalité en Physique et en Biologie. I. — Principes généraux. Lois : d'économie, d'extremum, de simplicité.... 10 fr.
468. GEORGES MATISSE. La question de la finalité en Physique et en Biologie. II. — Faits particuliers. Dispositifs et phénomènes présentés par les Etres vivants. Examen critique des théories.... 18 fr.
469. H. I. MARESQUELLE. Signification générale de la différence sexuelle.... 18 fr.
470. M. COLLIN. L'innervation de la glande pituitaire (Anatomie et Physiologie).... 20 fr.
471. M. ARCAY. Les ultrasons et leurs applications.... 15 fr.
472. GEORGES BOURION. L'ultraconvergence des séries de Taylor.... 12 fr.
473. M. LACROUTE. Raies d'absorption dans les spectres stellaires.... 20 fr.
474. GASTON RICHARD. La conscience morale et l'expérience morale.... 15 fr.
475. GASTON RICHARD. La Loi morale, les Lois naturelles et les Lois sociales.... 15 fr.
476. L. ESCANDE. Barrages. I. — Calcul des barrages poids à profil triangulaire. Théorie et calculs.... 20 fr.
477. L. ESCANDE. Barrages. II. — Calcul des barrages poids à profil triangulaire. Pratique du calcul. Abaques relatifs au cas ou N-0,03.... 20 fr.
478. L. ESCANDE. Barrages. III. — Profil optimum de barrage déversoir. Trace aerodynamique des piles.... 20 fr.

LISTE COMPLÈTE A LA FIN DU VOLUME

SAINT-AMAND (CHER). — IMPRIMERIE R. BUSSIÈRE.